

# Inferencias, conocimiento y acción

CONVERGENCIAS  
EN LÓGICA APLICADA

María Gabriela Fulugonio  
Javier Legris  
(compiladores)



**CIECE**

Centro de Investigación en Epistemología  
de las Ciencias Económicas  
IEP-UBA CONICET

**.UBAECONÓMICAS**

## **Serie libros del CIECE**

### **VOLÚMENES PUBLICADOS**

**Racionalidad, Economía e Interdisciplinariedad**

Gustavo Marqués (comp.)

**Perspectives on Epistemology of Economics. Essays on Methodology of Economics**

Andrés Lazzarini & Diego Weisman (eds.)

**Tópicos de Epistemología. Ensayos de Metodología de la Economía**

Diego Weisman (comp.)

**Filosofía de la Economía**

Silvia Lerner, Javier Legris y Gustavo Marqués (comps.)

Disponibles en [ciece.economicas.uba.ar/publicaciones/libros](http://ciece.economicas.uba.ar/publicaciones/libros)

# Inferencias, conocimiento y acción

CONVERGENCIAS  
EN LÓGICA APLICADA

María Gabriela Fulugonio  
Javier Legris  
(compiladores)

Fulugonio, María Gabriela

Inferencias, conocimiento y acción : convergencias en lógica aplicada / María Gabriela Fulugonio ; Javier Legris. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Universidad de Buenos Aires. Centro de Investigación en Epistemología de las Ciencias Económicas-CIECE , 2026.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-29-2095-5

1. Filosofía de la Ciencia. I. Legris, Javier II. Título

CDD 100

# ÍNDICE

## **PRIMERA PARTE**

### **Lógica y matemática**

- 12      **Et cetera**  
María Gabriela Fulugonio
- 35      **Si de verdad no se trata: el caso de inferencias  
lógico-matemáticas de carácter hipotético**  
Aída Sandra Visokolskis
- 47      ***Pureza del método e investigación axiomática  
en Hilbert: la cara pragmática***  
Guillermo Nigro Puente
- 72      **Intuiciones e Ingenios: Turing y el razonamiento  
matemático**  
Javier Legris y Mariana Olezza

## **SEGUNDA PARTE**

### **Disputas, conocimiento y... ¡acción!**

- 87      **Desacuerdos genuinos y profundos en lógica**  
Omar Vásquez Dávila
- 107      **Conocimiento e ignorancia en una lógica epistémica  
sintáctica**  
Luis Adrián Urtubey
- 122      **F-systems: Abordando paradojas y confrontaciones  
políticas**  
Gustavo Adrián Bodanza
- 132      **¿Existen principios de la racionalidad práctica?  
Un abordaje desde una perspectiva inferencialista**  
Ayelen Sanchez

## Prólogo

Entre el 15 y el 17 de noviembre de 2023 se llevó a cabo el primer *Simposio de Lógica y Lógica aplicada* organizado por M. Gabriela Fulugonio en el marco de las XXIX Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas en la ciudad de Buenos Aires. El Simposio llevó por título: *Lógica hoy y entre nosotros*. El objetivo era brindar un espacio donde investigadores de la región interesados en la lógica y sus muy diversas aplicaciones pudiéramos presentar y discutir nuestras ideas en un ámbito colaborativo que ofreciese, además, la posibilidad de dar continuidad a tales discusiones, considerando que las JECE estarían cumpliendo al año siguiente su tercera década de reuniones anuales.

Por cierto, la lógica estuvo presente desde las primeras JECE: no faltaron las mesas redondas (incluso un simposio sobre lógica deóntica en las JECE 2011), pero más de una vez las colaboraciones aparecían diseminadas a lo largo de las Jornadas, diluyéndose la oportunidad de un intercambio entre interlocutores afines. Recordando esto mismo, los propios investigadores –muchos de ellos, participantes desde las primeras ediciones de las Jornadas–, así como les asistentes, aplaudieron la iniciativa y sus resultados: el Simposio fue cuidadosamente planificado para que el orden de presentación facilite la reunión de los temas más cercanos y la continuidad de las referencias. De este modo, la discusión pudo reanudarse tras cada aporte, desde el comienzo hasta el final del Simposio y se publicó un informe de todo este trabajo en las Actas de las Jornadas.<sup>1</sup>

A poco que se haga una observación profunda se advierte que la disciplina que llamamos “lógica” se encuentra hoy en día en una situación particular. Desde luego, el marco general sigue siendo la lógica simbólica, la “forma moderna de la lógica”, de cuya constitución como disciplina científica ha pasado casi un siglo. Dentro de este marco, que implica, por lo menos, el uso de una notación especial y de herramientas matemáticas, se han hecho avances impresionantes en nuestra comprensión de lo que es la deducción y de sus aplicaciones en diferentes campos, en particular las ciencias de la computación. Pero, además de métodos y criterios formales, la aceptación de principios lógicos toma en cuenta otros aspectos. En la investigación actual se añaden al análisis lingüístico y puramente conceptual consideraciones *cognitivas*, y también se analizan casos específicos en la *historia* de la lógica y de su aplicación en la práctica científica. Tal como ha ocurrido en otras disciplinas, el estudio de la naturaleza del razonamiento deductivo comienza a centrarse más en la práctica

---

1 Fulugonio, M. G., 2024, Principios lógicos, inferencias, modelos y teorías: Sobre el primer Simposio de lógica y lógica aplicada en las JECE, en Laffitte, G. y Oneto, F. (comps.) Actas de las XXIX Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas CIECE-UBA, pp. 44–49.

deductiva llevada a cabo en diferentes campos, y no en ideas tomadas de alguna forma de *armchair philosophy*.

La distinción entre lógica pura y aplicada puede rastrearse ya en la antigüedad, incluso en Aristóteles. Por lo pronto, mientras que en *Metafísica*, I, 6, 1011b 20 el estagirita nos presenta el principio de tercero excluido, en *Metafísica*, IV, 3, 1005b 18-20, el principio de no-contradicción y en *Metafísica*, VII, 17, 1041a 16-18 el principio de identidad y en los Primeros analíticos aparece la primera teoría sobre la inferencia válida. No vamos a entrar en la discusión acerca de si la lógica es el estudio de las leyes máximamente generales (y, en tal caso, cabe considerar la teoría de la inferencia válida como una aplicación de la lógica para el estudio sistemático de las estructuras inferenciales) o si la lógica es propiamente el estudio de la inferencia válida. En cualquier caso, no hay dudas de que en *Refutaciones sofísticas* no encontramos con aplicaciones de la lógica en el terreno de las falacias en general. Y de que *Segundos analíticos*, usa nociones de la silogística para caracterizar la idea de definición y de demostración científica, *i. a.* Ya próximos al material del que versa el presente volumen, en el siglo XIX fue común hablar de la “lógica de la ciencia” como lógica aplicada. Unas tres décadas atrás, Dov Gabbay hizo explícita la distinción entre ambas al fundar el *Interest Group in Pure and Applied Logic* (IGPL), que dio lugar al *Journal of the IGPL*. El ámbito de la aplicación de la lógica es en este caso extremadamente amplio, respondiendo a la riqueza expresiva y a los recursos metodológicos de la lógica simbólica (y también a sus limitaciones). Las aplicaciones al razonamiento no clásico (que a veces va más allá de la lógica deductiva) y a las Ciencias de la Computación han sido, tal vez, las más frecuentes.

Sin pretender sentar posición (tampoco) acerca de la distinción entre lógica pura y lógica aplicada, todos los trabajos del presente volumen muestran cómo la lógica colabora en la dilucidación de algún problema teórico. De allí, el título del volumen, que se publica con el objetivo expreso de difundir las ideas de los autores y de profundizar el intercambio científico. El volumen reúne una selección de los trabajos discutidos durante el Simposio mencionado, organizados en torno a dos asuntos centrales:

- i. la lógica y su alcance en relación con la matemática,
- ii. el uso de la lógica frente a desacuerdos profundos y frente a las relaciones entre creencias y nuestros cursos de acción.

La primera parte del volumen, “**Lógica y matemática**”, sigue un orden cronológico en los temas tratados. Por este motivo, “*Et cetera*” sorpresivamente abre el volumen en lugar de cerrarlo y hacer honor al uso de dicha expresión. En él M. Gabriela Fulugonio revisa la cuestión de la naturaleza lógica del principio matemático de inducción completa conforme a la tesis propuesta por Gottlob Frege en su opúsculo seminal (1879) *Begriffsschrift, eine der*

*arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. La tesis fregeana fue defendida con posterioridad por Bertrand Russell (y Alfred North Whitehead) y revisada por Ludwig Wittgenstein en (1921) *Tractatus logico-philosophicus*. Sumándole el análisis de sus *Notebooks 1914–1916*, publicados póstumamente, en “*Et cetera*” se busca entender los fundamentos de la crítica tractariana y de su contrapropuesta.

Seguidamente, en “**Si de verdad no se trata: el caso de inferencias lógico-matemática de carácter hipotético**” Aída Sandra Visokolskis se ocupa de los argumentos suposicionales o hipotéticos y discute la perspectiva anticipadora de Charles Sanders Peirce en torno al concepto de abducción. Visokolskis señala que Peirce se ocupa primeramente de argumentos hipotéticos según su caracterización clásica, mientras que posteriormente enfatiza sobre las características propiamente suposicionales. Visokolskis argumenta que este énfasis logra teorizarse hoy mejor bajo una perspectiva pragmática a la vez apoyada en el funcionamiento del condicional material.

En “**Pureza del método y axiomática**”, Guillermo Nigro Puente defiende que el rol heurístico de la consideración de los contenidos pre-axiomáticos pretendidos de los enunciados de una teoría axiomática es indispensable para entender la investigación que el sistema posibilita, según lo manifestara David Hilbert en sus consideraciones acerca de la *pureza del método*. Así, Nigro Puente enfatiza sobre la importancia de considerar la interacción entre dos aspectos fundamentales de la axiomatización de Hilbert: el denominado “principio fundamental” (según la paráfrasis de Nigro: dadas una proposición  $\varphi$  y un conjunto de proposiciones  $\Gamma$ , la regla fundamental nos dice que el problema para la investigación axiomática es determinar si  $\varphi$  es o no lógicamente independiente de  $\Gamma$ ) y los pretendidos contenidos de los enunciados.

Finalmente, en “**Intuiciones e Ingenios: Turing y el razonamiento matemático**”, Javier Legris y Mariana Olezza se ocupan de las ideas acerca del razonamiento matemático que Alan Turing introdujo en relación con su “lógica ordinal”. Con el problemático concepto de “intuición” Turing identifica los aspectos del razonamiento matemático que van más allá de los procedimientos computables, a los que categoriza mediante el concepto de “ingenio”. En el trabajo los autores señalan la función que cumple esta distinción en el tratamiento que posteriormente hace Turing del concepto de inteligencia y exploran conexiones con otras distinciones, como por ejemplo la que formuló Charles S. Peirce entre razonamiento corolario y razonamiento teorematológico.

La segunda parte del volumen, “**Disputas, conocimiento y... ¡acción!**” contiene aplicaciones de la lógica a un caso específico de desacuerdo profundo, al problema de la ignorancia y, finalmente, a cuestiones normativas. De este modo, en su trabajo “**Desacuerdos genuinos y profundos en lógica**”, Omar Vásquez Dávila parte de la famosa discusión acerca del significado de los signos

lógicos que promoviera W. V. O. Quine en su obra *Philosophy of Logic* de 1970 y evalúa las distintas estrategias que pueden adoptarse frente a una disputa en la que hay desacuerdos profundos. Tal como enfatiza el autor, si bien la discusión puntual se presenta como un problema de la filosofía de la lógica, dadas las características del desafío quineano, las ideas propuestas por Vásquez Dávila pueden extenderse a otras áreas siempre y cuando el objetivo sea legitimar la comparación epistémica entre teorías en disputa.

A continuación, en su contribución “**Conocimiento e ignorancia en una lógica epistémica sintáctica**”, Luis Adrián Urtubey propone una elucidación de la noción de ignorancia. Para ello parte de la lógica epistémica sintáctica (LES) presentada por Sergei Artemov en su trabajo “Towards Syntactic Epistemic Logic” de 2022. La LES fue desarrollada originariamente para la teoría de juegos, elaborando ideas de Robert Aumann. Este sistema considera una situación epistémica como un conjunto de condiciones sintácticas, en vez de entenderla a partir de un único modelo, y de este modo permite capturar descripciones incompletas, cerrando la brecha entre el carácter sintáctico de la descripción del juego y su representación semántica. Así, la noción de ignorancia aparece como la especificación incompleta de un escenario epistémico. Finalmente, Urtubey ofrece aplicaciones de la LES en el ámbito de los grandes modelos de lenguaje.

Gustavo Adrián Bodanza en “**F-systems: Abordando paradojas y confrontaciones políticas**” aplica los llamados *F-systems* al modelado de la interacción entre grupos o facciones políticas y así consigue representar fenómenos como la polarización o la aparición de grupos disruptivos. Básicamente, se trata de un conjunto *S* de oraciones que expresan la falsedad de otras a través de una relación binaria. Los “conglomerados locales” de un *F-system* son subconjuntos de sentencias que se pueden tomar conjuntamente como verdaderas dejando afuera otras que son falsas o paradójicas.

Cierra el volumen Ayelen Sanchez con “**¿Existen principios de la racionalidad práctica? Un abordaje desde una perspectiva inferencialista**”. Su propuesta consiste en dar una respuesta que explique la articulación normativa entre los estados intencionales y los posibles cursos de acción del agente. Para ello adopta una perspectiva inferencialista acerca de las normas, apelando a una clasificación de las inferencias materiales en tres tipos: las que conservan compromisos, las que conservan habilitaciones y las que indican incompatibilidad.

La aparición de este volumen (accesible on-line, como los demás de la serie Libros del CIECE) aspira a favorecer la difusión y profundización de las discusiones acerca de la importancia de la lógica en la fundamentación de nuestras ideas y prácticas. Aspiramos, asimismo, a que el volumen se convierta en un libro de consulta para nuestros estudiantes, especialmente para aquellos que se interesen en estos temas de investigación. Hemos cuidado, para ello, que

cada capítulo ofrezca en su introducción (y bibliografía) un contexto que permita a un público no especializado no solo entender el ámbito de discusión en el que se encuentra, sino también la novedad propuesta.

La importancia de sumar a las publicaciones del CIECE este primer volumen dedicado al estudio en nuestro ámbito de la lógica aplicada no puede menos que celebrarse como una forma de mantenernos actualizados respecto del impacto de la disciplina en las distintas ciencias sociales y formales. De este modo, agradecemos a todas y todos las y los participantes y público del mentado primer de Simposio de Lógica y Lógica aplicada que está en el origen a este volumen y, muy en particular, a les que se trasladaron para ello desde distintos lugares del país y de países extranjeros. Asimismo, queremos expresar nuestro agradecimiento a Vanesa Sangoi, por ocuparse de la tarea de edición, a nuestros colegas integrantes del Comité Organizador de las Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas: Sandra Maceri, Pablo Mira, Ruth Pustilnik, Nora Schwartz, y, muy especialmente, a Eduardo Scarano, *alma mater* y entusiasta permanente de las Jornadas.

**María Gabriela Fulgonio**  
**Javier Legris**

# PRIMERA PARTE

Lógica y matemática

# Et cetera

María Gabriela Fulugonio

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas/CIECE,  
Argentina

[gabrielafulugonio@gmail.com](mailto:gabrielafulugonio@gmail.com)

- ¿De qué trata su trabajo?
- ¿Vio cuando decimos “etcétera, etcétera” o cuando en una definición aparecen puntos suspensivos?
- Sí.
- Bueno: de eso

¿Cuán posible es un análisis conceptual del principio de inducción completa? Gottlob Frege presenta su propuesta en la tercera parte de (1879) *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [Bs], propuesta que es posteriormente defendida por Bertrand Russell en (1903) *Principles of Mathematics* y en (1910) *Principia Mathematica*. No así por Wittgenstein en el *Tractatus Lógico-Philosophicus*. En lo que sigue muestro las dificultades del asunto y busco entender los fundamentos de la crítica tractariana y de su contrapropuesta.

Así, tras presentar en **I** al logicismo como un programa de investigación acerca del alcance cognoscitivo de la razón, me detengo en **II** en la definición fregeana de sucesión. Para entender los detalles de esta, expongo críticamente en **II. i.** la teoría de la generalidad de Bs. y las reglas de su sistema axiomático. En **II. ii.** detallo sus proposiciones más importantes: la 69 (definición de propiedad hereditaria), la 76 (definición de sucesión), 81 (fundamento del principio de inducción), 99 (propiedad conocida a partir de Russell como “ancestro débil”) y 115 (univocidad de un procedimiento). **II. iii.** adelanta la primera atención y crítica seria que recibe la propuesta de Frege a cargo del filósofo austriaco Benno Kerry en la serie que publica entre 1885 y 1891 en *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*. El ataque sobre la circularidad de la definición de sucesión lo hará también Ludwig Wittgenstein en el *TLP* y conducirá, a partir de la conocida disputa entre Russell y Poincaré en relación con las paradojas, a caracterizar a la definición de Frege como *impredicativa*. Habiendo estudiado en detalle todo lo anterior estamos, al fin, en condiciones de abordar la contrapropuesta del *TLP*. A ello dedico **III**. En **III. i** se analiza el *concepto formal de miembro general de una serie* y en **III. ii.** se presenta la notación *N*, las dos nociones fundamentales sobre las que descansa su propuesta.

Finalmente, en **IV** evalúo la justeza del “logicismo tractariano” que defiende Landini (2007), y nuevamente en (2021), destacando la importancia de la presentación tractariana en términos de funciones recursivas. De paso, desde el punto de vista histórico, encontramos en este énfasis sobre la mostración de una regla el germen de su posterior giro pragmatista.

**Palabras clave** | programa de investigación; logicismo; análisis; inducción completa.

## 1. Introducción: El logicismo como programa de investigación

En (1956) *Introducción a la filosofía matemática* Bertrand Russell dedica un capítulo entero a sus consideraciones sobre la palabra *el* (pp. 147 a 157) y, no satisfecho aún, anuncia que consagrará el capítulo siguiente, anteúltimo del libro, a la palabra *los* (pp. 159 a 169), siendo ambas una única palabra en inglés: *the*. Aun así, en el “Prefacio” resalta que el libro “no se propone ofrecer un análisis exhaustivo de los problemas que en él se exponen” (p. 9). “Menos mal.”, pensé en su momento, y continué leyendo: “Buena parte de lo que se expone en los próximos capítulos no puede considerarse estrictamente como «filosofía», si bien fue incluido en ella hasta que se desarrolló una ciencia satisfactoria de estas cuestiones. Por ejemplo, la naturaleza del *infinito* y de la *continuidad*” (p. 9, énfasis míos).

Por su parte, en los *Notebooks* Ludwig Wittgenstein afirma lo siguiente: “The concept “and so on”, symbolized by “...” is one of the most important of all and like all the others infinitely fundamental.” ¿Quién lo hubiera dicho? ¡Los puntos suspensivos! Pero esto ya había sido señalado por Russell en el “Apéndice A” de la segunda edición de *Principles of Mathematics* [PoM]. En este apéndice, dedicado enteramente a la obra de Frege, leemos:

Frege has, already in the *Begriffsschrift*, a very admirable theory of progressions, or rather of all series that can be generated by many-one relations (...). The relation in question holds between  $x$  and  $y$  if every property  $F$ , which is inherited in the  $f$ -series and is such that  $f(x, y)$  implies  $F(z)$  for all values of  $z$ , belongs to  $y$  (Bs. p. 60). (...) This is, so far as I know, the best method of treating such questions, and Frege’s definition just quoted gives, apparently, the best form of mathematical induction. (PoM, §495)

Sí: como tantos, llegué a interesarme por la tarea de Frege a partir de la obra de Bertrand Russell. Y en este trabajo quiero defender simplemente que el mejor modo de entender qué es el logicismo es considerándolo como un programa de investigación, a mi entender, un programa de investigación inserto en uno mucho más amplio que, si acaso fundante de la filosofía como tal, adquiere su impulso decisivo en la modernidad y que consiste en el escrutinio de nuestros modos de conocer en general. Así, el núcleo del programa logicista, propongo, es la tesis de que la lógica y la aritmética se originan en la misma fuente de conocimiento: la razón. Qué sea la razón es algo demasiado difícil de definir y tal vez sepamos de ella —más bien abductivamente— en virtud de sus presuntos efectos, pero en todo caso, por vía negativa, creemos que hay una fuente de conocimiento que no necesita de intuiciones sensibles espacio-temporales y que nos permite obtener conocimiento vinculando conceptos y juicios de

ciertas diversas maneras.<sup>1</sup> Que la lógica, en particular, no depende esencialmente de nuestras intuiciones espacio-temporales parece desprenderse, por lo pronto, del hecho de que podemos asumir la validez de un razonamiento con independencia del orden espacio-temporal en que nos son dados el conjunto de premisas y conclusión. Pero, sin duda, es más controversial el caso de la naturaleza de la aritmética. Con solo enfocarnos en sus modos inferenciales por excelencia, la sustitución de equivalentes y la inducción matemática, observamos que esta última apela a la serie ordenada de los números naturales. ¿No opera aquí una intuición, cuanto menos pura, de tiempo? Defender la tesis contraria es el desafío principal del programa logicista, *i. e.*, demostrar que la serie de los números naturales es una serie puramente lógica. Pero en cuanto *programa* de investigación, sostengo que su objetivo último es investigar —y propulsar o ampliar— las capacidades de la razón misma. Por ello, podrá haber objetivos parciales plasmados en tesis que la investigación demuestre acaso inviables, pero esto mismo no acabará con el programa, cuyo núcleo tiene una naturaleza más regulativa que propiamente sustantiva. El propio Gottlob Frege lo dice así en su obra seminal *Begriffsschrift* de 1879:

Dividimos en dos clases todas las verdades que requieren una fundamentación; mientras que la prueba puramente lógica puede preceder a las unas, las otras deben apoyarse en hechos empíricos. (...) Mientras me sometí a la pregunta de a cuál de estas dos clases pertenecen los juicios matemáticos, debí ensayar [cuán] lejos se podría llegar en la aritmética exclusivamente por medio de inferencias, apoyado sólo en las leyes del pensamiento que se elevan sobre todas las particularidades. Mi procedimiento fue éste: primero, busqué retrotraer el concepto de ordenación en una serie al de consecuencia lógica y de aquí progresar hasta el concepto de número. Además, para que no pudiera introducirse inadvertidamente algo intuitivo, se debió llegar a suprimir toda laguna en la cadena de inferencias.

---

1 A propósito de la conformación de un programa de investigación, en Lakatos 1989, p. 65, leemos: “He analizado el problema de la evaluación objetiva del crecimiento científico en términos de cambios progresivos y regresivos de problemáticas para series de teorías científicas. Las más importantes de tales series en el crecimiento de la ciencia se caracterizan por cierta continuidad que relaciona a sus miembros. Esta continuidad se origina en un programa de investigación genuino concebido en el comienzo. El programa consiste en reglas metodológicas: algunas nos dicen las rutas de investigación que deben ser evitadas (heurística negativa), y otras, los caminos que deben seguirse (heurística positiva)”.

(...) De estas necesidades nació la idea de la presente conceptografía. (Bs., pp. 7-8, el primer énfasis es mío)

Guiada, entonces, por la propuesta de entender al logicismo como un programa de investigación cuyo núcleo afirma que la lógica y la aritmética se originan ambas en la razón, discutiré la tesis sobre el “logicismo tractariano” de Gregori Landini. Para ello mostraré algunos detalles tanto técnicos como históricos y filosóficos del logicismo de Frege y Russell, muy en particular, a propósito de la definición de relación ancestral, que, presentada en la tercera parte de la *Conceptografía*, es la clave propuesta por Frege para la reducción logicista del principio de inducción. Luego, y tras un análisis de los rasgos generales de la principal propuesta formal del *Tractatus Logico-Philosophicus* en el que mayormente acuerdo con Landini, insistiré en la importancia de un aspecto de dicha propuesta que, considero, debe destacarse más: Aunque es cierto que adolece de los límites que ya para entonces se conocían de la lógica de primer orden, en el logicismo tractariano encontramos el germen de un programa de investigación que en pocos años se tornaría sumamente progresivo, *i. e.*, la caracterización recursiva de las funciones.

## 2. La definición de sucesión

Leamos la introducción a la sección \*90 del primer volumen de Russell (1910) *Principia Mathematica* [PM], p. 543:

It would commonly be said that *a* has to *z* the relation of ancestor to descendent if there are a certain number of intermediate people *b, c, d, ...* such that in the series *a, b, c, d, ..., z* each term has to the next the relation of parent to child. But this is not an adequate definition, because the dots in “*a, b, c, d, ..., z*” represent an unanalyzed idea.

Russell había atribuido justamente a Frege el análisis de esta idea en la *Bs*. Veamos entonces cuáles fueron sus principales momentos.

### 2. 1. Algunos detalles sobre la conceptografía

Siguiendo la tradición nacida del propio Frege, llamo “conceptografía” al lenguaje presentado en su libro *Bs*. El mismo consiste en un lenguaje formal en el que la oración elemental, como también los tradicionales enunciados categóricos y, en general, enunciados con predicados relativos y cuantificaciones múltiples se expresan recurriendo a una ampliación de la noción matemática de función. A propósito del recorrido que haremos conviene que repasemos sucintamente los usos notacionales de Frege a propósito de la teoría de la cuantificación

presentada en la primera parte de *Bs.*, §11: *Die Allgemeinheit*. La “generalidad” se expresa en el lenguaje de las dos siguientes maneras:

- i. afectando la barra de contenido con una concavidad y colocando sobre ella una letra gótica que oficiará también de argumento de la función que aparezca a la derecha,
- ii. mediante letras latinas minúsculas (de hecho, Frege abre *Bs.* con la afirmación de que así se usan en la teoría general de las magnitudes, cf. *Bs.*, §1).

Hemos de observar que Frege no hace ninguna distinción explícita entre las letras latinas minúsculas del comienzo del alfabeto respecto de las del final. No obstante y a este respecto, la  $x$  aparece por primera vez recién como el reemplazo que se indica sobre el axioma 58 (que, en términos contemporáneos, es el que regula la instanciación universal) de la letra  $c$ . Aplicando *modus ponens* junto con el axioma 8 (axioma de condicionalización) y sus debidas sustituciones se llega al teorema 62, que “remplaza al modo de inferencia Barbara, cuando la premisa menor  $g(x)$  tiene un contenido particular” (*Bs.*, §22). Este comentario acerca del teorema 62 unido al hecho de que lo que sigue a una barra de juicio debe ser un contenido judicativo permiten aseverar que la  $x$  no aparece allí como variable libre. Caben las dos siguientes interpretaciones: o bien indica generalidad (en su calidad de una letra latina más), y entonces nos preguntamos cuál ha sido el sentido de la sustitución de  $c$ , o bien (opción por la que me inclino), tiene una función paramétrica. De allí que  $g(x)$  tenga “contenido particular”.<sup>2</sup> Todo esto volverá a aparecer más adelante, muy en particular, en la definición de sucesión que nos interesa y en las proposiciones ligadas a ella que debemos destacar: la definición de propiedad hereditaria y la proposición (81), proposición en la que “descansa la inducción bernoulliana” (*Bs.*, §27, intitulado “Consecuencias”, nota al pie).

Así, presentado el modo de generar oraciones en la primera parte de la obra, en la segunda nos encontramos con un sistema axiomático para la lógica clásica de orden superior con el *modus ponens* como única regla explícita. Siguiendo la idea lakatosiana de que la ciencia progresa enmarcada en programas de investigación que, como tales, nacen imprecisos y es tarea propia del programa precisarse, no será otro el devenir del programa de Frege. Justamente, Frege declara su preocupación rectora de hacer explícitos sus pasos deductivos y la construcción de su novedoso lenguaje persigue exactamente esos fines y, sin embargo, en sus demostraciones utiliza más recursos que los anunciados: en particular, la regla de sustitución. Probablemente porque es la regla por excelencia de transformación en matemática, a Frege se le haya pasado por alto la necesidad de explicitarla en su sistema. Pero de esta regla se sigue en el

---

<sup>2</sup> No he encontrado ninguna observación sobre esto en la bibliografía correspondiente.

sistema de Frege el conocido principio de comprensión<sup>3</sup> según el cual toda función proposicional define un concepto, principio que resulta cuanto menos controversial si vale de modo irrestricto. Además, en su obra magna, *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege añade un axioma para caracterizar las extensiones de conceptos como objetos, necesario para su definición de *número* pero que vuelve contradictorio al sistema.

De todos modos, esto último forma parte de la etapa más avanzada del proyecto. En la propia *Begriffsschrift* Frege aborda el objetivo pretendidamente más básico de “retrotraer el concepto de ordenación en una serie al de consecuencia lógica”, asunto de nuestro próximo apartado.

## 2. 2. Propositiones 69, 76, 81, 99 y 115

Presentado el sistema en las dos primeras partes, la tercera comienza con la siguiente definición de propiedad hereditaria:

$$\|-\left[\begin{array}{c} \text{---} \text{d} \text{---} \text{a} \text{---} F(\alpha) \\ \text{---} f(\text{d}, \alpha) \\ \text{---} F(\text{d}) \end{array}\right] \equiv \begin{array}{c} \delta \\ \mid \\ \alpha \end{array} \left( \begin{array}{c} F(\alpha) \\ f(\delta, \alpha) \end{array} \right) \quad (69)$$

No tengo lugar acá para dar la traducción al lenguaje natural de cada símbolo conceptográfico, que se encuentra en prácticamente todas las exposiciones de la lógica de Frege, pero no quiero dejar pasar un detalle que no he visto en ningún otro lugar. Antes, facilitemos la lectura de la proposición 69 que Frege propone al final del párrafo:

Si de la proposición de que  $\delta$  tiene la propiedad  $F$ , sea lo que fuere  $\delta$ , se puede inferir en general que cada resultado de una aplicación del procedimiento  $f$  sobre  $\delta$  tiene la propiedad  $F$ , entonces digo:

3 Zalta 2021 expone con gran claridad esta inferencia. Su formulación de la regla recurre al cálculo  $\lambda$ , pero previo a ello propone una formulación (imprecisa aunque) suficiente para lo que necesitamos acá. Zalta 2021 dice: “En todo teorema de la forma ...Fx... con F libre podemos sustituir cualquier fórmula abierta  $\phi x$  por todas las ocurrencias de Fx en ...Fx... Consideremos ahora el teorema  $\forall x (Fx \leftrightarrow Fx)$ . Por introducción del cuantificador existencial en segundo orden tenemos  $\exists X \forall x (Xx \leftrightarrow Fx)$  y por sustitución obtenemos el esquema de comprensión  $\exists X \forall x (Xx \leftrightarrow Ax)$ ” (la traducción es mía. Cf. también Boolos 1985, p. 337).

‘la propiedad  $F$  se hereda en la serie [generada por]  $f$ ’ ( $Bs.$ , §24).

En lenguaje hoy más usual:

(PH)  $(\forall x) \{ Fx \rightarrow (\forall y) (f(x, y) \rightarrow Fy) \}$

Frege ofrece el siguiente ejemplo de propiedad hereditaria: Sea  $f(x, y)$  la circunstancia de que  $y$  es hijo de  $x$  y sea  $F$  la propiedad de ser un hombre, (PH) significa que cada hijo de un hombre es un hombre, *i. e.*, que la propiedad de ser hombre se hereda en la relación padre-hijo (cf.  $Bs.$ , §24).

Volvamos ahora a la fórmula 69. Tras introducir este galimatías simbólico — como lo es cualquier lenguaje que desconocemos— Frege dice:

Esta proposición se distingue de las consideradas hasta ahora, en que los símbolos que aparecen en ella no han sido definidos previamente; ella misma da esta definición. No dice: “el lado derecho de la igualdad tiene el mismo contenido que el izquierdo”, sino “debe tener el mismo contenido”. Por tanto, esta proposición no es un juicio.

Pero todo debe ser dicho en la propia conceptografía. Lo de recién no es más que la traducción de algo que se ha expresado formalmente. ¿Cómo? Mediante la duplicación de la barra de juicio. Esto es ampliamente conocido; no lo siguiente: El cuidado que tiene Frege y que debemos observar en dejar un espacio entre este nuevo símbolo para introducir definiciones y el contenido. De otro modo, nos encontraríamos con una barra horizontal y luego la afirmación de un juicio, que no es lo que se quiere hacer.<sup>4</sup>

Al introducir la definición de propiedad hereditaria, Frege aclara que esta proposición y las definiciones que van a sumarse en breve no son juicios, sino que “sólo tienen el propósito de producir una simplificación extrínseca por medio del establecimiento de una abreviatura. Además, sirven para destacar una especial combinación de símbolos frente al todo de las combinaciones posibles y, con ello, obtener una visión más segura de la idea” pero que, una vez aceptado el significado de los nuevos símbolos, el enunciado sí puede afirmarse

---

<sup>4</sup> Perla propia de la transmisión oral que observara Christian Thiel cuando discutiéramos sobre lo que presentaría en Paderborn en julio de 2023. ¿Algo obvio? Puede ser, pero nadie lo había notado antes. Algo que si bien está presente en  $Bs.$ , no lo está, por ejemplo, en la traducción de la UNAM de Hugo Padilla (cf. Frege 1972, §§ 24 y 26). Debo la corrección de la edición de la fórmula a mi amiga Beatriz Belelli.

como juicio, juicio que resulta verdadero analíticamente (cf. *Bs*, §24), o sea en virtud de su significado. Algo que Frege hace seguidamente en el §25.

Con esta definición de propiedad hereditaria se formula la definición buscada “ $x$  sigue a  $y$  en la serie generada por  $f$ ”:

$$\left[ \begin{array}{c} \mathcal{F} \\ \left[ \begin{array}{c} \mathcal{F}(y) \\ \mathfrak{a} \\ \mathcal{F}(\mathfrak{a}) \\ f(x, \mathfrak{a}) \\ \delta \quad \mathcal{F}(\alpha) \\ \alpha \quad f(\delta, \alpha) \end{array} \right] \end{array} \right] \equiv \begin{array}{c} \gamma \\ \sim f(x_\gamma, y_\beta) \\ \beta \end{array} \quad (76)$$

cuya paráfrasis reza:

Si de ambas proposiciones, de que cada resultado de una aplicación del procedimiento  $f$  sobre  $x$  tiene la propiedad  $F$ , y de que la propiedad  $F$  se hereda en la serie [generada por]  $f$ , sea lo que fuere  $F$ , se puede inferir que  $y$  tiene la propiedad  $F$ , entonces digo:

“ $y$  sigue a  $x$  en la serie [generada por]  $f$ ” o

“ $x$  precede a  $y$  en la serie [generada por]  $f$ ” (*Bs*, §26).

Siguiendo la escritura anterior:

$$(SUC) (\forall F) \{ (PH \ \& \ (\forall y) (f(x, y) \rightarrow Fy)) \rightarrow Fy \}^5$$

---

<sup>5</sup> No sigo a Landini 2020, p. 5, en su afirmación de que Frege introduce esta definición usando comprensión impredicativa. En esta definición se cuantifica universalmente sobre una letra predicativa de manera irrestricta y por ello es impredicativa, según se calificará a tales enunciados a partir de la conocida discusión entre Poincaré y Russell, pero no hay en ella la afirmación de existencia propia del principio de comprensión. Sí, de todos modos, subyace en la lógica de Frege el principio de comprensión, pero ello a raíz de la regla de sustitución utilizada como modo de inferencia que no se ha explicitado (cf. Zalta 2021).

A partir de Russell se conocerá esta definición también como *ancestro fuerte o propio* (cf. *PM*, vol. I, p. 543), en el sentido en que nada es su propio ancestro, en virtud del ejemplo principal que ofreciera Frege de *propiedad hereditaria*.

Tras la afirmación de las definiciones (69) y (76) en tanto juicios (analíticos, en cuanto deben su verdad al significado de sus términos componentes) Frege logra arribar al teorema 81, que parafraseamos del siguiente modo:

$$[Fx \ \& \ (\text{PH}) \ \& \ (\text{SUC})] \rightarrow Fy.^6$$

Dice Frege, *Bs*, §27:

(81) se puede traducir así:

*Si x tiene una propiedad F que se hereda en la serie generada por f, y si y sigue a x en la serie f, entonces y tiene la propiedad F.*<sup>14</sup>

<sup>14</sup>En esto descansa la inducción bernoulliana. [Nota al pie de Frege]

Este es precisamente el paso clave de la inducción matemática: con la asunción adicional de que el primer miembro de la serie originada por *f* tiene la propiedad hereditaria *F* podemos mostrar que todo miembro de la serie tiene dicha propiedad. Al fin, la caracterización logicista del principio de inducción.

Pero Frege no se queda allí. Posiblemente con el afán de probar la fertilidad de sus definiciones (cf. Boolos, pp. 332–3), Frege prueba algunos resultados más, como, por ejemplo, que la relación ancestral fuerte es transitiva (teorema 98). Acto seguido propone la definición de lo que hoy se conoce como *ancestro débil* en términos de (SUC). Para decir que “*b* pertenece a las series generadas por *f* que comienzan con *a*” se dice:  $b = a \vee (\text{SUC})$  (proposición 99). Finalmente, en el § 31 tenemos la definición de univocidad de un procedimiento (proposición 115). Russell, por su parte, en *PM* introduce la noción de ancestro débil de *a* instanciando el esquema de axioma de reducibilidad, que en verdad es un

---

<sup>6</sup> Sigo a Beaney 1996, pp. 78–79, con la salvedad de que Beaney reemplaza *x* e *y* por *a* y *b* respectivamente. Yo prefiero preservar —momentáneamente— el uso de las letras originales, para mantener la homogeneidad con las fórmulas conceptográficas anteriores, pero debe tenerse en cuenta lo que se dijo anteriormente sobre la teoría de la generalidad de Frege: aunque no aparezcan explícitamente los cuantificadores, estamos ante una fórmula cerrada. Más adelante sí asumo el cambio que propone Beaney.

esquema de axioma de comprensión impredicativa de relaciones en intensión:

\*12.n  $(\exists f) (\phi (x_1, \dots, x_n) \equiv_{x_1, \dots, x_n} f! (x_1, \dots, x_n))$ , donde la variable de predicado  $f!$  no es libre en  $\phi$ .

La instanciación mencionada arroja lo siguiente:

$(\exists f) (f! z \equiv_z (\phi! a \& (x) (\phi! x \supset . \phi! (x+1) \supset . \phi! x))$ .

Y con ello se puede probar el teorema inductivo (cf. Landini 2020, pp. 4–5).

En relación con el logicismo de uno y otro autor, el logicismo de Frege evolucionará hacia la tesis, posterior a *Bs.*, de que los números son objetos abstractos particulares, mientras que Russell habrá de sostener que no hay particulares abstractos en ninguna rama de la matemática (cf. Landini 2020, p. 1). Pero esto no juega ningún papel a propósito de la crítica que el programa recibirá de Wittgenstein, pero cuyo puntapié estuvo años antes a cargo del joven filósofo austriaco Benno Kerry.

### 2. 3. La crítica de Kerry

Resulta que (SUC) es circular. Así lo señala por primera vez el filósofo vienés Benno Kerry en el cuarto artículo de su serie „Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung” publicada entre 1885 y 1891 en *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* [VwPh]:<sup>7</sup>

Así, la cuestión radica en el verdadero objeto de nuestra reflexión, el seguir y a  $x$  en la serie generada por  $f$  <sup>1)</sup>. Esto significa que  $y$  ha de ser considerada, por tanto, como siguiendo a  $x$  en la serie generada por  $f$  cuando se pueda

---

<sup>7</sup> En Fulugonio 2008, que debe su motivación a conversaciones con Angelelli muy especialmente, se analiza el asunto sumándole la intervención de Russell 1903. Angelelli 2012 propone discriminar dos tipos distintos de circularidad posibles, mientras que Heck 2016 propone una definición alternativa de relación ancestral a la vez que defiende la legitimidad de las definiciones impredicativas. Schmidt 2020, tras una excelente reconstrucción de la discusión, argumenta que aunque impredicativa la definición no es circular, al menos, no crasamente circular, tal como es adelantado en Fulugonio 2008 y Angelelli 2012. El asunto de si la definición discutida capta adecuadamente el presunto sentido intuitivo de la noción está (breve aunque claramente) presentado ya en Wright 1983, pp. 159–60.

probar que  $y$  tiene todas las propiedades hereditarias en la serie generada por  $f$ . Ahora bien, este criterio tiene, por lo pronto, un valor dudoso, ya que no existe un catálogo de tales propiedades; por lo tanto, uno no está nunca seguro de haber agotado su esencia. A esto se le agrega como decisivo el hecho de que, tal como el propio autor lo demuestra<sup>2)</sup>, una de las propiedades que se heredan en la serie generada por  $f$  es justamente: seguir a  $x$  en la serie generada por  $f$ . Según esto, la decisión de si  $y$  sigue a  $x$  en la serie generada por  $f$ , según la definición dada para este concepto, depende del hecho de que, junto con muchas otras cosas acerca de las propiedades hereditarias en general, se sepa, en particular sobre la propiedad hereditaria “seguir a  $x$ ”, si  $y$  posee esta propiedad o no. (Kerry IV, pp. 294–295, traducción mía).

1) Cf. arriba, pp. 270, 293.

2) Conceptografía, p. 71 (fórmula 97).

Antes de continuar con el análisis de la noción de sucesión debe aclararse, tal como Russell correctamente lo hace en *PoM*, p. 522, que Kerry omite la cláusula que dice que  $y$  debe tener todas las propiedades hereditarias en la serie generada por  $f$  pertenecientes a todos los términos relacionados con  $x$  mediante  $f$ . Pero, también, que Kerry ha citado la definición fregeana de sucesión correctamente en Kerry IV, p. 270, página a la que remite.<sup>8</sup>

Revisemos ahora la circularidad que Kerry señala a conciencia de que el propio Frege la ha demostrado en el teorema 97, parafraseado del siguiente modo: *La propiedad de seguir a  $x$  en la serie  $f$  se hereda en la serie  $f$*  (§28). Esto básicamente se ha logrado a través de la siguiente sustitución:

$$F(\Gamma) \left| \begin{array}{l} \gamma \\ \sim f(x\gamma, \Gamma\beta) \\ \beta \end{array} \right.$$

En el lugar de  $F(\alpha)$  del *definiendum* de la fórmula 69 puede colocarse el *definiendum* de la fórmula 76. Todo indica que esta circularidad no es problemática para Frege, y podemos conjeturar que por ello no atiende a la observación de Kerry, cuando sí atiende a su crítica a la noción de concepto —

---

<sup>8</sup> Es muy útil la exposición de Wille 2018, p. 183, en este punto. Obsérvese el uso de la regla de sustitución.

que aparece en los artículos segundo y cuarto— en su renombrado (1892) “Über Begriff und Gegenstand”, publicado en la misma *VwPh*.

A esta circularidad propia de una lógica en donde se puede cuantificar sobre predicados, se le suma el siguiente problema: el principio de comprensión impredicativa, modo inferencial subyacente en la lógica de *Bs.* (y en *PM*, esquema de axioma fundamental para la expresión logicista de la inducción matemática), es una afirmación de existencia y ello es, tal vez, excesivo desde un punto de vista lógico.

Que el principio de comprensión afirme demasiado o no desde un punto de vista puramente lógico dependerá de qué se entienda por lógica, evidentemente. Así, por ejemplo, el joven Wittgenstein, ingeniero aeronáutico de formación, que en abierta disonancia con lo estudiado en *PM* entendía que ni en lógica ni en matemática había genuinas afirmaciones, no podía aceptar en ellas el principio de comprensión de manera irrestricta, por lo que en su *TLP* propondrá un enfoque diferente, también puramente lógico a su entender, de la fundamentación de la inducción matemática.

### 3. El logicismo tractariano

Mi interés en lo inmediato es discutir la tesis de Landini 2007 acerca del presunto logicismo del *TLP*,<sup>9</sup> según la cual no hay diferencia esencial entre las aplicaciones del operador propuesto *N* involucradas en el cálculo de las tautologías lógicas generalizadas y las operaciones definidas recursivamente (por medio de exponentes numerales) involucradas en el cálculo de la corrección de las ecuaciones aritméticas. En este sentido, mientras que para Wittgenstein ni la lógica ni la aritmética consisten en un cuerpo de verdades, ambas tienen una fuente en común en la práctica de calcular la igualdad de los resultados de las operaciones involucradas en los sistemas que las codifican. Y es justamente la creencia en la comunidad de la lógica y la aritmética como modos de conocimiento de la razón lo que he definido como el núcleo del programa logicista y lo que da continuidad a sus integrantes, aun cuando para defender dicho núcleo sostengan hipótesis en tensión, cada cual con sendas líneas de investigación. En este caso, en los programas de Frege y Russell rige el principio de comprensión impredicativa. Esto significa que el principio de comprensión impredicativa está presente en los sistemas axiomáticos

---

<sup>9</sup> Cf. Landini 2020, p. 2, en donde anuncia al presente “Tractarian Logicism: Operations, Numbers, Induction” como una elaboración de dicha tesis. A su vez, en pp. 13–14 señala que Ascombe 1959 habría sido la primera en formular tal logicismo (que supone que todas las operaciones del *TLP* son del mismo tipo), pero le atribuye el haberse excedido al equiparar la noción wittgensteniana de término general de una serie con la noción matemática de término general de una serie consecutiva.

construidos mediante conceptos puramente lógicos de los cuales se pretenden que se sigan las verdades aritméticas.

Es bien conocida la diferencia de concepción de Wittgenstein respecto de la lógica y la matemática, según la cual ninguna de dichas disciplinas consiste en un cuerpo de enunciados, por lo que la mencionada reducción axiomática es rechazada *in toto*. Pero el contenido de un axioma puede ser expresado a través de una regla, por lo cual la diferencia del logicismo de Wittgenstein no puede limitarse al rechazo de una presentación axiomática apropiada. Lo que Wittgenstein exige es, por el contrario, una presentación finitista del programa que podemos sintetizarla en su rechazo a la aplicación irrestricta del principio de comprensión, que solo se acepta cuando la función que presumiblemente determina la existencia del concepto es introducida por una regla que explicite el significado de la expresión “y así siguiendo”. Pero para comprender en qué consiste la presunta equiparación wittgensteniana de la lógica y la aritmética necesitamos revisar mínimamente su presentación de dichas disciplinas a través de sus innovaciones técnicas: la notación *N* y la noción de *forma general de la oración*, noción a la que llega partiendo de su concepto formal *miembro general de una serie*. Empecemos por este último.

### 3. 1. El concepto formal término general de una serie

En coincidencia con Frege y Russell sobre la importancia que tiene para la caracterización de la naturaleza de la aritmética elucidar la noción “y así siguiendo”,<sup>10</sup> Wittgenstein propone lo que denomina el “concepto formal *término general de una serie*”. A diferencia de Frege y Russell, el filósofo austriaco entiende que el pretendido carácter analítico tanto de la lógica como de la matemática se debe a que dichas disciplinas, en efecto, no afirman nada, sino que son sistemas de pseudoenunciados que a través de su forma lógica muestran la estructura de ciertos hechos o, también, de lo que se debe hacer frente a una situación dada. Comprender esto es necesario para comprender su propuesta. Veamos (salvo el último, todos los destacados son míos):

4.122 Podemos en cierto sentido hablar de *propiedades formales* de objetos y de hechos simples, o de las propiedades de las estructuras de los hechos y, en el

---

10 Según se sigue no solo de su trabajo en el *Tractatus* sino también de sus *Notebooks*, de las que Landini 2020 presenta un cuidadoso rastreo. Cito a modo de ejemplo la nota del 21. Nov. 1916, que parcialmente ya cité en la Introducción y que posiblemente sea la más conocida tal vez por su contundencia: “We now need a clarification of the concept of the atomic function and the concept “and so on”. The concept “and so on”, symbolized by “....” is one of the most important of all”.

mismo sentido, de relaciones formales y de relaciones de estructuras.

(En lugar de propiedad de estructura digo también “*propiedad interna*”; en lugar de la relación de estructura, “relación interna”).

Introduzco estas expresiones para indicar la fuente de confusión, tan extendida entre los filósofos, entre relaciones internas y relaciones genuinas (externas).

La existencia de dichas propiedades y de *relaciones* internas, sin embargo, no puede establecerse por medio de proposiciones, sino que se muestra en las proposiciones que representan hechos simples y que versan sobre los objetos en cuestión.

4.123 Una propiedad es interna si resulta *impensable que su objeto no la posea*. (el énfasis es mío)

A propósito de la confusión “extendida entre los filósofos”, la distinción que Wittgenstein dice introducir está presente ya claramente en Aristóteles y recorre toda la historia de la filosofía. Y si bien Wittgenstein se alinea con la crítica de Russell y Moore a los idealistas *more* Bradley (para más detalle, cf. Klagge 2022, pp. 131–2), su propuesta no es otra que la de los idealistas de la modernidad, como vemos en la proposición 4.123 que le sigue. Continuemos:

4.1252 A las series que están ordenadas por una relación *interna* las llamo series de formas.

La serie de los números no está ordenada por una relación externa, sino por una relación interna.

Lo mismo pasa con la serie de las proposiciones ‘aRb’, ‘ $(\exists x) : aRx \cdot xRb'(\xi)$ ’, ‘ $(\exists x, y) : aRx \cdot xRy \cdot yRb'(\xi)$ ’, y así sucesivamente.

(Si *b* está en una relación como estas con *a*, llamo a *b* el sucesor de *a*).<sup>11</sup>

Con estas nociones en mente veamos cómo Wittgenstein aborda la tarea elucidativa:

---

<sup>11</sup> Si bien he optado por la reciente traducción de Tomasini muy especialmente porque logra una redacción más afable y comprensible, acá debe seguirse la de Muñoz y Reguera: se trata de un sucesor de *a*. La unicidad solo le cabe al sucesor inmediato. Más allá de este detalle, cabe destacar el aplomo con que la versión de Tomasini salva muchas otras inconsistencias notacionales que figuran en el original respetando siempre el contenido, ello solo posible tras una comprensión profunda del tema, del autor y del lenguaje propio y ajeno.

4.1273 Si queremos expresar en la notación conceptual la proposición general “b es un sucesor de a” necesitaremos para ello una expresión para el término general de la serie de formas:  $aRb$ ,  $(\exists x): aRx \cdot xRb$ ,  $(\exists x, y): aRx \cdot xRy \cdot yRb$ , ... El término general de una serie de formas sólo se puede expresar por medio de una variable,<sup>12</sup> pues el concepto “término de esta serie de formas” es un concepto *formal*. (Frege y Russell pasaron esto por alto; de ahí que el modo como ellos quieren expresar las proposiciones generales, como la recién mencionada, sea erróneo; contiene un *circulus vitiosus*). Podemos determinar el término general de una serie de formas dando su primer término y la forma general de la operación que produce el siguiente término a partir de la proposición precedente.

En lugar entonces de apelar a la comprensión irrestricta, y a través de ello a un presuntamente probado teorema de inducción matemática, Wittgenstein pretende capturar la idea pura de sucesión apelando a la serie de iteraciones de una operación que estará definida por una cláusula que *muestre* cómo generar tal serie (cf. Landini 2020, pp. 6–7). Según Wittgenstein, “y así siguiendo” indica la repetición de la operación y ello ha de indicarse mediante el concepto formal “miembro general de una serie”:

5.2521 A la aplicación repetida de una operación a su propio resultado la llamo ‘su aplicación sucesiva’ ( $O' \ O' \ O' \ a$ ) es el resultado de la triple aplicación sucesiva de “ $O' \ \xi$ ” a ‘a’).

5.2522 Escribo el término general de una serie de formas  $a$ ,  $O'a$ ,  $O'O'a$ , ... así: ‘ $[a, x, O'x]$ ’. Esta expresión entre corchetes es una variable. El primer término de la expresión entre corchetes es el inicio de una serie de formas; el segundo la forma de un término cualquiera  $x$  de la serie y el tercero la forma de dicho término de la serie que sigue inmediatamente de  $x$ .

5.2523 El concepto de aplicación sucesiva de una operación es equivalente al concepto ‘y así sucesivamente’.

---

<sup>12</sup> Esto está respaldado por la distinción wittgensteiniana entre conceptos propios y formales, según la cual las variables son conceptos formales que representan una forma constante que poseen todos los valores de la variable (cf. TLP 4.1271).

Tanto trabajo para llegar a esto. “y así *sucesivamente*” significa “aplicación *sucesiva* de la operación mencionada”. Es cierto que el texto original no se muestra tan escandalosamente circular: “Der Begriff der successiven Anwendung der Operation ist äquivalent mit dem Begriff „und so weiter“”. Pero en cualquier caso lo que no aparece es el análisis de la noción pura de sucesión (que permanece como noción primitiva), a diferencia de lo que defendían Frege y Russell: que la noción de sucesión debe elucidarse mediante una afirmación acerca de lo que acaso podría ser infinito. Wittgenstein, en cambio, adopta el concepto de *variable estructurada* de Russell y lo que tanto su maestro como Frege han definido como *relación ancestral* cuantificando sobre predicados él lo hace mediante su concepto formal “término general de una serie”, una variable estructurada que muestra cómo se debe proceder. O sea, con la intención de expresar generalidad reemplaza el problemático uso de cuantificadores simplemente por variables, respaldado por la convicción de ni la lógica ni la matemática se expresan mediante enunciados sino mediante pseudo-enunciados. Veamos ahora con un poco más de detalle este asunto de la generalidad, que Wittgenstein introduce juntamente con el operador lógico *N*.

### 3. 2. La notación *N*

Wittgenstein pasa (a lo largo del propio *TLP*) de su tratamiento tabular de las verdades lógicas a la notación *N* a fin de extender a la teoría cuantificacional con identidad su idea de la posibilidad de mostrar según uno y un único modo las condiciones veritativas de todas las equivalencias lógicas. Todas y solamente las equivalencias lógicas han de tener la misma notación *N*, que es introducida así:

5.5 Toda función de verdad es un resultado de la aplicaciones sucesivas de la operación (----V) ( $\xi$ ...) a proposiciones elementales. Esta operación niega todas las proposiciones que están entre los paréntesis de la derecha y la llamo ‘negación de esas proposiciones’.

5.501 Yo indico por medio de un signo de la forma  $\bar{\xi}$  una expresión entre paréntesis cuyos miembros sean proposiciones la denoto —si el orden de los términos que están entre paréntesis es indiferente. ‘ $\xi$ ’ es una variable cuyos valores son los términos de la expresión entre paréntesis y la línea sobre la variable indica que ésta representa todos sus valores en el paréntesis.

(...) Cómo se efectúe la descripción de los términos de las expresiones entre paréntesis no es esencial.

*Podemos* distinguir tres especies de descripciones: 1) La enumeración directa (...). 2) Dar una función  $\bar{f}x$ , cuyos valores para todos los valores de  $x$  son las proposiciones

por describir. 3) Dar una ley formal de acuerdo con la cual se construye cada proposición. En este caso, los términos de las expresiones entre paréntesis son todos términos de una serie de formas.

5.502 Por consiguiente, en lugar de ‘(----V)( $\xi$ ,...)’ escribo ‘ $N(\bar{\xi})$ ’.

$N(\bar{\xi})$  es la negación de todos los valores de la variable proposicional.

$N$  es una forma generalizada del junctor de Sheffer: niega no solo oraciones sino colecciones de oraciones. Wittgenstein menciona tres modos en que dicha generalidad puede aparecer a través de la aplicación de  $N$ . En primer lugar,  $N$  puede ser aplicada a una lista finita de oraciones dando por resultado una lista de sus negaciones. En segundo lugar, “ $N(f(x))$ ” expresa la colección de todas las oraciones que son negaciones de oraciones de la forma de una variable proposicional como “ $f(x)$ ”. (A diferencia de lo que ocurre en cualquier teoría cuantificación usual de hoy en día, en la teoría wittgensteniana las diferentes variables ligadas por un mismo tipo de cuantificador deben ser instanciadas por diferentes valores y esto hace muy difícil su traducción a las actuales.)<sup>13</sup> En tercer lugar, el sistema puede también expresar la generalidad propia de las definiciones recursivas. Retomando la expresión de Wittgenstein, “una serie de formas” reúne series de formas de oración a través de términos que expresan la aplicación potencialmente infinita de una regla formal iterada paso a paso.

Por cierto, algunas de las reglas para este cálculo están implícitas en el uso que se hace de  $\bar{\xi}$ , como por ejemplo la sugerida conmutatividad de las bases (cf. *TLF* 5.501). En Landini 2020, p. 22, encontramos el conjunto completo de reglas que surge abductivamente teniendo en cuenta los objetivos de Wittgenstein y algunos de sus ejemplos. Su tratamiento de la cuantificación y la identidad, en cuanto posible, se logra a través del uso de variables libres y de la cláusula “y así siguiendo” introducida con notación  $N$  (cf. Landini 2020, pp. 17–18). Aquí los principales párrafos:

5.52 Si los valores de  $\xi$  son todos los valores de una función  $f_x$  para todos los valores de  $x$ , entonces

$$N(\bar{\xi}) = \sim (\exists x) . f_x.$$

---

<sup>13</sup> Sigo en esta presentación a Floyd 2021, p. 11, quien destaca el acuerdo al que se arribó tras décadas de investigación de que el sistema  $N$  puede expresar la lógica de primer orden con identidad, aunque dada la tercera forma de generalidad habilitada contiene también generalidad de definiciones recursivas.

5.521 Yo separo el concepto todo de las funciones de verdad.

Frege y Russell introdujeron la generalidad en conexión con el producto lógico o con la suma lógica. (...)

5.523 El signo de generalidad aparece como argumento.

5.524 Si están dados los objetos, entonces con ellos están ya dados también todos los objetos.

Caben aquí algunos comentarios elucidatorios en virtud del estilo aforístico del *Tractatus*. Sugiero que 5.523 se entienda en el sentido de que la generalidad bajo la cual se pretende decir algo se muestre a través del argumento de una función de modo que allí aparezca una variable, digamos, de objeto. En tanto que la noción de objeto es una noción formal su aparición ha de suponer *todos* los objetos, tal como se dice en 5.524. En la propuesta semántica informal de Wittgenstein cada variable individual tiene una asignación que hace que su referente sea distinto al de toda otra variable y, recurriendo a una *n* esquemática, se obtiene una cuantificación finitamente limitada, pero con un límite arbitrario (cf. Landini 2007, p. 135). Como la lógica poliádica es indecidible, el plan de Wittgenstein no resulta en general (cf. Landini 2020, pp. 19–22 y 24).

Así, sumando la notación *N* al concepto formal de miembro general de una serie de formal se llega a la forma general de la proposición:

6 La forma general de las funciones de verdad:  $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ .

Esta es la forma general de la proposición.

Y esto le es suficiente para arribar a su noción de número. El papel que en el primer caso cumple la operación *N* en el segundo estará cubierto por la operación aritmética *suma*:

6.03 La forma general de los números enteros es:

$[0, \xi, \xi+1]$

En ambos casos nos encontramos frente al pasaje regulado siempre por la misma regla de una estructura sintáctica a otra. Es la forma general de la repetición, de la cual las ecuaciones aritméticas y las tautologías son sus ejemplos paradigmáticos. Mientras que el logicismo anterior procura demostrar que la consecuencia aritmética es una forma de consecuencia lógica, para Wittgenstein solo hay un procedimiento que debe ser esencialmente posible de llevar a cabo por seres finitos. Este procedimiento debe poder ser indicado recursivamente, único modo que garantiza que dicho ser finito pueda operar indefinidamente. La lógica y la matemática son constitutivas del

pensamiento y, nuevamente siguiendo la tradición leibniziana, todo se simplifica si las concebimos como meros cálculos algorítmicos, parece decir Wittgenstein. Pero el problema es que estamos frente a nociones o teorías que no son decidibles.

Wittgenstein coincide con sus mentores en la importancia de la elucidación del concepto “y así siguiendo”. Pero justamente su elucidación sigue manteniendo a dicha noción como primitiva siempre que en su análisis figura la idea de repetición sucesiva: “y así siguiendo” significa la indicación de la aplicación repetida de la operación en cuestión a su propio resultado. Pareciera que para Frege no hay idea de la razón alguna en la expresión “y así siguiendo” y sin embargo es necesario reemplazar tal expresión por una construcción conceptual en muchas expresiones en donde “y así siguiendo” tiene un valor ineludible. Para Wittgenstein, en cambio, parece ser un concepto primitivo, o al menos, que lo es la idea de repetición indefinida de una operación o regla. Ahora bien, pretendidamente, sabré que un elemento sigue a otro en una serie porque lo genero repitiendo una regla, pero siempre podremos preguntarnos frente a lo dado, si un elemento sigue a otro y la respuesta ¿solo estará en la capacidad del sujeto de mostrar la ley de su generación? Esta explicación no puede satisfacer al realismo propio de Frege y Russell. Para peor, la propia idea de repetición está inserta en la noción de operación de Wittgenstein. Porque ¿qué es una operación para Wittgenstein?

En el *TPL* 5.251 leemos que no puede confundirse la noción de operación con la noción de función ya que “una función no puede ser su propio argumento pero el resultado de una operación puede convertirse, ciertamente, en su propia base”. Obviamente no podemos aceptar este razonamiento sin más. Tampoco una operación puede ser su propia base, a la manera que dice la cita (con la intención de distinguir las nociones de función y operación): que una función no puede ser su propio argumento. Sí puede una función ser función de lo conformado por ella misma y su argumento, exactamente del mismo modo en que el resultado de la aplicación de una operación sobre una base resulta ser una base sobre la que puede iterarse la operación. El problema evidentemente no está ahí, pero sí podemos suponer que Wittgenstein quiere indicar que hay un problema (aunque no el que señala), que es el vinculado con la generalización irrestricta. La lógica de *Bs.* comprende una jerarquía de niveles de funciones que van de entidades (cada una de un nivel dado) a objetos. Las funciones son “insaturadas” y ello es lo que las diferencia de los objetos, pero cuando en *Gl* y *Gg* Frege correlaciona las funciones con objetos (sus extensiones) habilita la renombrada paradoja de Russell.<sup>14</sup> Y justamente por ello, Wittgenstein propone la restricción de la comprensión impredicativa para conceptos. De este modo, su noción de

---

<sup>14</sup> Cf. Landini 2020, p. 2. Tomasini Bassols 2011, pp. 85–86, remite en su explicación de este párrafo a *TLP* 3.333, que comienza del mismo modo para terminar mencionando la paradoja de Russell.

operación bien puede entenderse como una especificación del concepto de función tal que la comprensión solo esté permitida cuando la función es introducida por una regla que establece el término general de la serie generada por sus aplicaciones (cf. Landini 2020, p. 6).

#### 4. Conclusión

Quiero terminar estas reflexiones con una propuesta que complementa la tesis de Landini según la cual el logicismo tractariano puede defenderse muy bien abductivamente. En efecto, pasajes sumamente significativos del *Tractatus* logran esclarecerse investigando las cartas, los escritos propios del llamado periodo medio de Wittgenstein (muy en particular, las *Philosophische Bemerkungen*) y completando bajo esta hipótesis las tareas que el TLP deja a cargo del lector. Pero también es cierto que dicho logicismo difiere del de sus mentores (tanto considerado globalmente como en cada propuesta particular) en un tema muy caro, que es el tratamiento que en cada caso se permiten de lo infinito. En el primer caso, rige la comprensión impredicativa para conceptos. En su rechazo, Wittgenstein recurre a tres ideas, deudoras todas de su tesis fundamental de que ni la lógica ni la aritmética comportan contenido: i) la noción de variable estructurada (tomada directamente de Russell, aunque el recurso no es tampoco ajeno a Frege), ii) la posibilidad de que un lenguaje o, posiblemente mejor, un sistema signico en lugar de decir *muestre*<sup>15</sup> (o sea reflejo de) lo que se proponga y iii) una aparejada noción de operación.

Finalmente, de estudiar la diferencia específica del logicismo del *Tractatus* surge que en su interpretación de las expresiones lógicas y matemáticas en tanto indicaciones de cómo se debe continuar a partir de una situación dada no solo figura la propuesta de un programa de investigación que en pocos años se tornaría sumamente progresivo (la caracterización recursiva de las funciones), sino también el germen del posterior giro pragmatista wittgensteiniano.<sup>16</sup>

#### 5. Agradecimientos

Una versión preliminar de este trabajo fue presentada en el Coloquio “Lecturas del *Tractatus* de Ludwig Wittgenstein” en SADAF, Buenos Aires, 2022, y poco antes en el *Seminario de Lógica y Filosofía* dirigido por Alberto Moretti y Sandra Lazzer, también con sede en SADAF. Ese mismo año lo presenté en el Simposio organizado por Oscar Esquisabel y Eduardo Giovanini: “La naturaleza de lo matemático: entre la práctica y la teoría” en el marco de las XV Jornadas de Comunicación de Investigación en Filosofía (Universidad Nacional del Litoral,

---

<sup>15</sup> Y aquí hay muy buenas razones para señalar a Frege como antecedente.

<sup>16</sup> Sandra Lazzer me recordó que ya Hintikka conecta la noción de cálculo wittgensteiniana con su posterior noción de juegos de lenguaje (cf. Hintikka 1996, p. 316, por ejemplo).

Santa Fe) y en el Simposio “Filosofía de la matemática” organizado por Valeria Valiño y Javier Legris para las XXVIII Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas (Facultad de Ciencias Económicas-UBA). Mis presentaciones están en prensa en respectivas actas en el momento en que escribo esto. En 2023 presenté desarrollos sobre los aspectos más formales del trabajo en las Jornadas de homenaje a Volker Peckhaus *Die Geschichte der Logik neu denken* (Universität Paderborn), colaboración a aparecer en el volumen correspondiente, en el Simposio organizado por Sandra Visokolskis “What are Inferences? Some Reflections In-Between Logic, Language, and Cognition” del 17th Congress of CLMPST y, posteriormente, en Montevideo en el XXIV Coloquio CONESUL de Filosofía de las Ciencias Formales.

Agradezco a los organizadores y participantes de todos estos encuentros el intercambio, así como a Ignacio Angelelli, Christian Thiel, Wolfgang Kienzler, Michael Beaney, Rosario La Sala y Gottfried Gabriel por las discusiones sostenidas con relación a estos temas a lo largo de los años. Asimismo, agradezco el espacio de las JECE XXIX para exponer los resultados que estaban ya un poco desperdigados y la posibilidad de unificarlos para este volumen.

Dedicado a mi viejo amigo Christian Thiel.

## Bibliografía

- Angelelli, I. (2012). Frege’s ancestral and its circularities. *Logica Universalis*, 6(3), 477–483.
- Anscombe, G. E. M. (1959). *An introduction to Wittgenstein’s Tractatus*. Harper & Row.
- Beaney, M. (1996). *Frege: Making sense*. Duckworth.
- Boolos, G. (1985). Reading the *Begriffsschrift*. *Mind*, 94(375), 331–344.
- Floyd, J. (2021). *Wittgenstein’s philosophy of mathematics*. Cambridge University Press.
- Frege, G. (1962). *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* (Vol. 1). Georg Olms Verlagsbuchhandlung. (Obra original publicada en 1893)
- Frege, G. (1964). *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (I. Angelelli, Ed., con comentarios de E. Husserl y H. Scholz). Georg Olms.
- Frege, G. (1972). *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos* (H. Padilla, Trad.). UNAM.

- Fulugonio, M. G. (2008). Benno Kerry: Una crítica temprana al logicismo de Frege y un antecedente en la historia del problema de la impredicatividad. *CLE e-Prints*, 8(6).
- Heck, R. G., Jr. (2016). Is Frege's definition of the ancestral adequate? *Philosophia Mathematica*, 24(1), 91–116.
- Hintikka, J. (1996). *Ludwig Wittgenstein: Half-truths and one-and-a-half-truths*. Springer.
- Kerry, B. (1887). Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung. *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 11, 246–307.
- Klagge, J. (2022). *Tractatus in context: The essential background for appreciating Wittgenstein's Tractatus Logico-Philosophicus*. Routledge.
- Lakatos, I. (1989). *La metodología de los programas de investigación científica* (J. Worrall & G. Currie, Eds.; J. C. Zapatero, Trad.; P. Castrillo, rev.). Alianza. (Obra original publicada en 1978)
- Landini, G. (2007). *Wittgenstein's apprenticeship with Russell*. Cambridge University Press.
- Landini, G. (2020). *Tractarian logicism: Operations, numbers, induction* [Manuscrito aceptado]. *The Review of Symbolic Logic*. <https://doi.org/10.1017/S1755020320000350>
- Landini, G. (2021). Tractarian logicism: Operations, numbers, induction. *The Review of Symbolic Logic*, 14(4), 973–1010. <https://doi.org/10.1017/S1755020320000350>
- Russell, B. (1956). *The principles of mathematics*. Allen & Unwin. (Obra original publicada en 1903)
- Russell, B. (1988). *Introducción a la filosofía matemática* (M. Bofill, Trad.; R. Grasa, supervis.). Paidós.
- Schmidt, J. (2020). On the impredicativity and circularity of Frege's ancestral. *Perspectiva Filosófica*, 24(2), 204–230.
- Tomasini Bassols, A. (2011). *Explicando el Tractatus: Una introducción a la primera filosofía de Wittgenstein*. Grama.
- Whitehead, A. N., & Russell, B. (1910). *Principia Mathematica* (Vol. 1). Cambridge University Press.
- Wille, M. (2018). *Frege: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [Reihe "Klassische Texte der Wissenschaft"]. Springer.
- Wittgenstein, L. (2022). *Tractatus Logico-Philosophicus* (A. Tomasini Bassols, Trad.). Procesos Editoriales Don José. (Obra original publicada en 1922)

# Si de verdad no se trata: el caso de inferencias lógico-matemáticas de carácter hipotético

Aída Sandra Visokolskis

Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba,  
Córdoba, Argentina

[sandraviso@gmail.com](mailto:sandraviso@gmail.com)

En la práctica de la lógica y/o de la matemática suelen aparecer, de manera muy frecuente, argumentos no basados en la verdad de sus premisas, sino tan sólo apoyados por suposiciones de las cuales no sabemos su valor de verdad pero que se aceptan por mor de la argumentación. La presente ponencia se ocupa de este tipo de argumentos suposicionales o hipotéticos, buscando explicitar qué características notables poseen y por qué la interpretación *mainstream* actual - a saber, la perspectiva para la cual el significado de 'si' no está dado cabalmente por el condicional material-, no parece tan viable como se suele sostener. Para cumplir ambas metas, el trabajo se orienta a discutir la perspectiva anticipadora de Charles Sanders Peirce acerca de los razonamientos hipotéticos, mucho tiempo antes de esta discusión contemporánea. En este sentido, se propone analizar la noción de hipótesis en el seno de las diversas variantes que Peirce elaboró a lo largo de sus años de trabajo en torno al concepto de abducción, habida cuenta que su primera versión constituyó un argumento hipotético propiamente dicho, mientras que las versiones posteriores rescatan características suposicionales que pueden entenderse actualmente como una perspectiva pragmática a la vez apoyada en el condicional material.

**Palabras clave** | inferencias lógico-matemáticas; argumentos suposicionales; abducción; Peirce

## 1. Introducción

El presente trabajo se orienta a analizar los razonamientos suposicionales como parte de los llamados razonamientos hipotéticos. En este sentido se busca reconocer la existencia y valor que ellos poseen específicamente en argumentaciones que propongan la introducción de elementos novedosos. Es precisamente en tales casos donde los razonamientos suposicionales cobran especial significación, en instancias de construcción de conjeturas que provean de la existencia creativa pero tentativa de entidades teóricas en ámbitos científicos, así como en contextos prácticos.

La tarea propuesta nos lleva a incurrir en la indagación de los escritos de Charles Sanders Peirce (1839-1914) acerca del tema de la abducción como el único tipo de razonamiento reconocido por él que aporta novedad (Peirce, 1903, *CP* 5.171), y que, además, adquiere un estatuto de argumentación falible, plausible y por ello provisional, pero que, a la vez abre posibilidades insospechadas a caminos de investigación que, de otra manera, se verían dificultados a prosperar.

En orden a enfocarnos en los razonamientos suposicionales, debemos distinguirlos de otro tipo de razonamientos hipotéticos, los que aquí hemos dado en llamar “epistémicos”. Estos últimos no incluyen la asunción de premisas por sí mismas sino en favor de la asunción de verdad de éstas. Y es este aspecto alético, donde una suposición, además requiere que de ella quepa la posibilidad de verdad, la que intentamos descartar como primordial en términos de la construcción de hipótesis meramente conjeturales, sin atisbos necesariamente de iniciar indagaciones a partir de la creencia en su verdad o de la existencia de las entidades que postula.

En la sección 2 siguiente encaramos el tratamiento de la distinción entre hipótesis suposicionales e hipótesis epistémicas. En la sección 3 nos enfocamos en el modo como Peirce analiza a las hipótesis en general como abducciones que, en algunos casos son suposicionales. Seguidamente, a modo de conclusión, discutimos el valor de la mera suposicionalidad frente a casos donde cunde la verdad en los puntos de partida de los razonamientos creativos.

## 2. Caracterización y propuesta de clasificación de razonamientos hipotéticos

En ocasiones, quienes generan hipótesis, lo hacen en algún contexto epistémico. Con lo cual, esas hipótesis son tomadas como *creencias* a ser agregadas en el corpus cognitivo del background existente. Sin embargo, aquí nos concentraremos en aquellos procesos hipotéticos que no buscan ser descriptos en términos de creencias, sino en su carácter de *suposiciones sólo por*

*mor de la argumentación*. Caracterizamos así dos tipos de hipótesis, de las cuales nos focalizaremos en las últimas: hipótesis epistémicas (*HE*) e hipótesis suposicionales (*HS*).

En su libro *For the Sake of the Argument. Ramsey Test Conditionals, Inductive Inference, and Nonmonotonic Reasoning* (1996), Isaac Levi se adhiere a la corriente de autores que acepta que existan razonamientos hipotéticos (aquí llamados ‘suposicionales’) sin tener que cumplir el requisito de basarse en creencias. Esta distinción entre razonamientos basados en creencias (que, por eso hemos denominado ‘epistémicos’) y razonamientos sostenidos por suposiciones, pone en evidencia el valor de lo meramente suposicional: “Cualquier agente que tenga un claro ‘sentido de la realidad’ distingue entre lo que cree plenamente que es verdad y lo que supone que es verdad en aras del argumento” (Levi 1996:1). Aquí cabe la comparación analógica con el dominio de las narraciones ficcionales:

El razonamiento suposicional en este sentido se asemeja a la escritura de ficción que plantea un cierto tipo de situación e invita al lector a ‘suspender la incredulidad’ y proceder como si las ‘premisas’ de la historia fueran ciertas. Los lectores con una imaginación ferviente pueden confundir ficción con realidad (...) Incluso aquellos que reflexionan más cuidadosamente sobre el carácter del cambio de creencias pueden tener dificultades con la distinción. (Levi 1996:3)

Para Levi, el agregado de una hipótesis de tipo suposicional es, en realidad un ejercicio de la imaginación, que no representa un genuino cambio en el estado de creencias. Y, sin embargo, tiene un rol central en la construcción científica de argumentos lógicos.

El razonamiento suposicional es importante para muchos tipos diferentes de reflexión. En ninguno de estos contextos suponer que *h* equivale a creer que *h*. A veces la suposición ‘contraviene’ el estado actual de creencia. A veces concuerda con el estado actual de plena creencia. Y a veces el estado actual refleja suspenso sobre el estado de la suposición. Suponer por mor del argumento es claramente diferente de creer. Cambiar creencias plenas requiere algún tipo de explicación o justificación. La suposición no. (Levi 1996:5)

En su caracterización de los razonamientos epistémicos, Levi (1991) se posiciona en contra de la teoría AGM de revisión de creencias planteada por Alchourron, Gärdenfors y Makinson (1985). En cambio, en su libro de 1996 mencionado *ut supra*, Levi propone revalorizar el razonamiento suposicional “por mor del argumento”, y aplicarlos para el cambio racional de creencias - como AGM-, así como en casos de deliberaciones prácticas.

Quien, a su vez ofrece una caracterización más clara del papel de los razonamientos suposicionales en vez de los epistémicos es Jonathan Cohen. En efecto, en su libro *An Essay on Belief and Acceptance* (1992), más allá de tratar la noción de aceptación como un tipo específico de suposición, enfatiza la diferencia que aquí planteamos, en los siguientes términos: las creencias son sentimientos (*feelings*) que no necesariamente requieren de una configuración lingüística, pero las suposiciones deberían plantearse en algún momento discursivamente para proseguir los razonamientos, debido a que su existencia puede caer en ejercicios imaginativos. En este sentido, Cohen aclara que los animales no humanos, así como los infantes prelingüísticos pueden considerarse poseedores de creencias, precisamente pues no requieren el aparato lingüístico detrás para sus concepciones.

A su vez, una creencia se puede clasificar como una disposición a tener un cierto tipo de sentimiento mental, no como una disposición a realizar una cierta clase de acción. En cambio, las suposiciones pueden estar ligadas a acciones. El verbo ‘suponer’ comúnmente denota un acto inherentemente temporal de imaginación, que mueve al sujeto a simular activamente situaciones que pueden ser en principio, inesperadas, e incluso falsas. Por ello, suponer p no es lo mismo que tomar a p como premisa: en este último caso, ya se da por aceptado a p como dato reconocido. A menudo también estamos restringidos a asumir p por el momento, solo porque, por el momento no tenemos evidencia suficiente para adoptar la política de tomar como premisa a p. Suponer p no es lo mismo que creer que p es verdadero: en realidad tiene que ver con *suspend* *el juicio* sobre si p es verdadero o falso. No se expide por ninguna de las dos opciones en principio: tal vez digamos que sólo estamos asumiendo que p para señalar que es arbitrario si tomamos p o alguna otra proposición similar como premisa en el dominio dado.

En contextos epistemológicos y científicos suelen aceptarse hipótesis epistémicas (*HE*) en mayor grado que las hipótesis suposicionales (*HS*). Estas últimas tienen por cierto menos incidencia en la transmisión de la verdad que las *HE*. En este sentido, es común entender peyorativamente que las *HS* son hipótesis epistémicas degradadas, meramente especulativas, al estilo de las “*hypothesis non fingo*” de Newton, i.e. presuposiciones no confirmadas que, por ello mismo parecen representar conjeturas ociosas y sin fundamento, inadecuadas para fundamentar la ciencia; especulaciones no garantizadas. Sin embargo, las *HS* son muy utilizadas, ubicuas e invaden todos los dominios del

pensamiento y la acción. Por ello, cabe aplicar la siguiente analogía con base en el campo matemático y aquí transferida al dominio de las hipótesis epistémicas y suposicionales: Philip J. Davis y Reuben Hersh (1981) plantearon en su libro *The Mathematical Experience* que los matemáticos profesionales de todos los departamentos académicos, en general, durante los días de trabajo en la semana, adherían a una postura filosófica naïve realista, aceptando que las entidades matemáticas existían en algún tipo de mundo abstracto e ideal y así las manipulaban aplicando propiedades similares a aquellas de las entidades físicas, materiales y concretas. Esta actitud realista les facilitaba el acceso a la información matemática. Pero, si alguien les preguntaba un fin de semana qué tipo de realidad ellas poseen, adoptaban una actitud escéptica y antirrealista opuesta a la asumida anteriormente, negando toda posibilidad de acceso a las mismas. De manera análoga, los científicos, de lunes a viernes, mientras trabajan, suelen utilizar sin miramientos las HS como moneda corriente, sin ahondar acerca de si son creencias o no (sin expedirse acerca de su estatuto epistémico, y por ende sin admitir si son HE o no). Pero si un día de fin de semana cuando no trabajan, se les pregunta por ellas, seguramente responderán que no creen en meras suposiciones: ¡creen sólo en creencias!

Afirmamos que el papel que cumplen las HS es el de sustitutos surrogativos de supuestas “verdaderas creencias”. Así, mientras razonamos argumentativamente, no necesitamos expedirnos respecto de si son creencias o no, verdaderas o no, justificadas o no. Una crítica frecuente que reciben las HS consiste en que “violan el principio de que el aprendizaje proviene sólo de reportes observacionales”. La crítica afirma que las HS ya poseen una carga teórica inaceptable, pues partimos suponiendo lo que queremos probar, sin antes haber garantizado estas hipótesis como confiables. Pero si esto es así, caeríamos en un regreso al infinito, o en un círculo vicioso, o en una adherencia a una base que también sería desconocida, y, por ello, tampoco garantida. Pero entonces los detractores de la existencia de las HS serían partidarios de una creación ex nihilo de hipótesis epistémicas, o de intuiciones a la Descartes: infalibles, directas, inmediatas y certeras.

Como adherentes de Peirce, rechazamos el cartesianismo referido al tema de las intuiciones. En este sentido Peirce, aunque favorece a ciertas interpretaciones empiristas, como pragmatista realista que era, afirma que no podemos ir muy lejos en nuestras investigaciones sólo operando sobre la base de la sólo observación. ¡Alguna carga teórica impera a la hora de establecer hipótesis! En este sentido, sostendremos junto con Peirce que, en vez de intuiciones cartesianas, otro elemento debe servir para explicar la formación de hipótesis. Peirce terminó por aceptar cierto tipo de instinto para conjeturar.

En nuestro caso, en vez de aceptar a pie juntillas este dictum instintivo peirceano, optamos por asumir la presencia de intuición experta, apoyada en años de fijación de creencias y conocimientos. De esta manera, esta definición

de instinto que Peirce baraja, debería matizarse por otros procedimientos inferenciales y asociativos, que, si bien no están en la letra de Peirce, lo están en su perspectiva, hallándose otros textos que darían cuenta de esta situación. En consecuencia, asumimos que existen *intuiciones expertas* (que no responden al sentido cartesiano, i.e. son falibles, indirectas, mediatizadas por inferencias) en la formación de hipótesis. Intuiciones expertas basadas en gran cantidad y calidad de conocimiento previo. Para poder formar hipótesis creativas plausibles será un requisito ser un perito en el área en cuestión. En este sentido, una función clave de los razonamientos hipotéticos suposicionales es que van más allá de los datos del mundo inmediato. Y otro rasgo más interesante aún consiste en que las hipótesis de este tipo no operan simplemente con la realidad a secas sino van más allá de la imaginación.

En la sección siguiente pondremos a prueba esta revalorización y adaptación actual de las ideas peirceanas sobre la noción de hipótesis suposicional, a partir de un ejemplo autorreferencial que el mismo Peirce utilizó para aclarar el sentido que tenía su noción de hipótesis basada en la inferencia abductiva.

### **3. La abducción como hipótesis. El valor de las suposiciones en la perspectiva de Charles Sanders Peirce**

Los planteos de *hipótesis suposicionales* son tratados por Charles Sanders Peirce como casos de inferencias abductivas  $P \rightarrow Q$ , donde el antecedente  $P$  describe un problema dificultoso a resolver, y el consecuente consiste en la propuesta de una solución plausible  $Q$ , que, por sus características, no resulta lo habitualmente esperable. Cuando buscamos qué respuesta propone Peirce en la descripción de estas abducciones, el mismo plantea una suerte de composición de dos tipos de elementos involucrados en el resultado plausible (pero falible)  $Q$ :

[i] Por un lado, Peirce habla de la presencia de un *instinto para conjeturar* o simplemente para “adivinar” la respuesta  $Q$ , tal como fue expuesto en la sección anterior.

[ii] Pero, por otro lado, Peirce sugiere que  $Q$  es el resultado de una *inferencia*, un razonamiento lógico que además responde a la pregunta de por qué se da  $Q$  a partir de  $P$ .

En cuanto al aporte del *instinto* en Peirce (“*instinct to guess*”), el mismo está caracterizado por dos principios:

[i] Los seres humanos tienen cierta capacidad biológica de “adivinar” o “conjeturar” bien.

[ii] A menudo, de la observación se derivan fuertes indicaciones de la verdad, sin ser capaces los seres vivos, en ocasiones, de especificar cuáles son las características que se han observado, y que proporcionan esas indicaciones.

Este tipo de razonamientos peirceanos parecen encajar con otra clase de inferencias que Igor Douven denomina “condicionales del eslabón perdido” (“*missing-link conditionals*”) (Douven 2016, 2017). Su rasgo característico es que, como su nombre indica, no parece haber vínculo entre su antecedente y su consecuente. En el caso del planteo peirceano *no es* que no existe vinculación entre P y Q, sino que tal vinculación debería ser explicitada para evitar caer en un estado de sorpresa por lo aparentemente disparatado que significa vincular P con Q. Como la abducción  $P \rightarrow Q$  habitualmente se suele presentar sin el acompañamiento de tal explicación, dicha inferencia se suma a los casos de aparente desconexión entre antecedente y consecuente.

A continuación, nos adentraremos en un análisis de una situación que el mismo Peirce vivenció y que le permitió utilizar, a modo de ejemplo paradigmático, del uso de hipótesis abductivas.

### **3.1. Ejemplo autorreferencial peirceano de generación de una hipótesis. *Guessing* (Peirce, 1907): el caso de un robo que Peirce padeció durante un viaje**

En lo que sigue pasamos a caracterizar el ejemplo autorreferencial de Peirce, en términos abductivos. El evento que conforma el estudio de caso consiste en la sustracción de objetos personales que experimentara el propio Peirce durante un viaje de Boston a Nueva York en el barco Fall River. Una vez que el barco hubiera atracado en el puerto de Nueva York, Peirce detecta el robo. Este se produce en el camarote de Peirce de tres de sus objetos: un reloj, una cadena y un abrigo ligero. Peirce sospecha de los (aproximadamente 20) asistentes que atienden la zona de los camarotes donde Peirce estuvo alojado durante su travesía. En realidad, Peirce *no sabe* quién pudo haber sido el o los ladrones de sus pertenencias. No obstante, Peirce *aventura una primera hipótesis*, construida a partir de sus propios prejuicios respecto del color de la piel de los seres humanos: es plausible que, entre los asistentes, todas personas de color, se halle el ladrón (en singular), dado que ellos tuvieron oportunidad de ingresar a las habitaciones como parte de su trabajo en la zona de camarotes del barco. Cabe observar que, si bien existe una jefatura de policía en Nueva York donde Peirce acudirá eventualmente, él mismo se anticipa a cualquier ayuda extra que le permita recuperar sus bienes, e inicia una investigación al respecto. Es así como en algún momento intervendrá, en esta tarea de búsqueda, Mr. Bangs, inspector de policía.

El ejemplo entonces consiste en la narración de la pesquisa que Peirce inició (en colaboración con terceros), hasta conseguir recuperar sus objetos perdidos

en manos de otros. Este tipo de indagación que el filósofo encara consta de varios argumentos de tipo abductivo, y, por ende, de la generación de varias hipótesis, que, como veremos, son todas de tipo suposicional *HS*. Pero como, además, Mr. Bangs coopera en la búsqueda, habrá allí otro estilo de argumentación que puede compararse con el de Peirce. Esto conlleva describir la participación de dos pensamientos opuestos: uno del inspector de policía Mr. Bangs, quien intentó ayudar a Peirce a rescatar los objetos que le fueron sustraídos durante dicho viaje, y que lo interpretaremos como una posición típicamente deductivista basada en *creencias* previas; y otro, el aporte del pensamiento peirceano, que involucra la generación abductiva de hipótesis de tipo *suposicional*, aplicadas a resolver el problema de averiguar quién le había robado ciertos objetos de su pertenencia, y cómo recuperarlos.

Para la explicación peirceana utilizaremos la siguiente versión de abducción proporcionada por Peirce en *A Letter to Welby*, 16 July 1905, *MS L 463*<sup>1</sup>:

Si H es verdadero, C es verdadero.

Pero C es verdadero.

---

Por tanto, ¿no es H verdadera?

En cambio, la explicación deductivista del inspector Mr. Bangs se basa en un argumento (deductivo) de tipo Modus Tollens:

Si H es verdadero, C es verdadero.

Pero C no es verdadero.

---

Por tanto, H no es verdadero.

La comparación de perspectivas diferentes contribuye a estimar el relevante rol que posee un pensamiento no deductivista en la formación de nuevas ideas, especialmente en la configuración del tipo de inferencias involucrado en dicho proceso.

La siguiente caracterización consta de<sup>2</sup>:

- H<sub>P</sub>: la hipótesis o conjetura explicativa peirceana del fenómeno ocurrido

---

<sup>1</sup> En la versión original en inglés, en vez de figurar la letra H para 'hypothesis', figura una letra A.

<sup>2</sup> Como la narración de todo el razonamiento complejo y completo de ambos, desde la producción del robo hasta su recuperación presenta varios argumentos abductivos y deductivos, éstos aparecen numerados, indicado esto a través de la aplicación de subíndices como contadores.

- C<sub>P</sub>: la experiencia autorreferencial peirceana sorprendente por ser contraria a nuestras expectativas
- H<sub>B</sub>: la hipótesis o conjetura explicativa del inspector Mr. Bangs del fenómeno ocurrido
- C<sub>B</sub>: la experiencia/hecho experimentado por Mr. Bangs
- A<sub>i</sub>: acciones i de los diversos participantes de la narración

Detallemos a continuación cuáles fueron las acciones seguidas paso a paso:

(A<sub>1</sub>) Se produce un robo en el camarote de Peirce en el barco Fall River durante su travesía de Boston a New York, de tres de sus prendas: un reloj, una cadena (y la pequeña bitácora de oro que contenía un compás y que estaba unida a ella) y un abrigo liviano.

(A<sub>2</sub>) Peirce sospecha únicamente de los (aproximadamente 20) camareros. [Peirce parte de una creencia suya respecto de quién puede ser un ladrón allí en el barco, y quiénes otros no lo serían, basado en sus prejuicios]

(A<sub>3</sub>) Peirce interroga a los camareros del barco Fall River.

(A<sub>4</sub>) Los induce a creer a cada uno de ellos que “ningún prestamista en New York [les] dará más de 50 dólares por [sus] cosas [robadas]”.

(A<sub>5</sub>) Asume que uno de ellos en particular es el ladrón; se lo dice y le propone a éste que acepte 50 dólares a cambio de traerle a él sus cosas robadas. [acto que lleva a formular una *suposición*, la hipótesis H<sub>P1</sub>]

(H<sub>P1</sub>) El ladrón del reloj (uno de los camareros del barco Fall River señalado por Peirce) “irá inmediatamente a empeñar[lo] (en alguna casa prestamista de New York) apenas salga del trabajo en el barco a la una (...), por el que conseguirá 50 dólares”. [hipótesis suposicional HS]

(A<sub>6</sub>) El inspector Mr. Bangs decide enviar a su investigador.

Al respecto, Peirce se expide narrando la situación de la siguiente manera:

[El policía] fue al barco y descubrió que ‘mi hombre’, como llamaré al hombre del que yo estaba tan seguro de que era el ladrón, había sido durante muchos años el ayudante del propio capitán y no podía haber estado en la cubierta donde estaba mi camarote, mientras que había un conocido sinvergüenza entre aquellos camareros que podrían posiblemente haber estado allí. Como consecuencia el sinvergüenza fue seguido, mientras que ‘mi hombre’ no lo fue. (Peirce 1907)

[La estrategia deductiva falla] <Peirce retoma entonces su propia investigación>. Podemos resumir este episodio a partir del siguiente argumento:

(H<sub>B1</sub>) El ladrón (señalado por el investigador de Mr. Bangs) irá a empeñar el reloj.

(C<sub>B1</sub>) El ladrón NO resultó ser el que Peirce señaló.

Si H<sub>B1</sub> es verdadero, C<sub>B1</sub> es verdadero.

Pero C<sub>B1</sub> no es verdadero.

---

Por tanto, H<sub>B1</sub> no es verdadero.

[La premisa condicional de este argumento Modus Tollens encierra la creencia equivocada de Mr. Bangs de que el ladrón es otro diferente del señalado por Peirce, y, por tanto, éste claramente no irá a empeñar el reloj, pues no fue él. Este razonamiento deductivo se basa en descartar al verdadero culpable por suponer que los ayudantes del capitán del barco no suelen estar en cubierta, donde estaba el camarote de Peirce.]

Esto lleva a Peirce a llevar a cabo las siguientes acciones:

(A<sub>7</sub>) Peirce se encarga de enviar tarjetas a todos los prestamistas de Fall River, ofreciendo una recompensa de 150 dólares por la devolución de un reloj con las características y número del suyo.

(A<sub>8</sub>) Al cabo de uno o dos días, el abogado de un prestamista reclama los 150 dólares a cambio de la devolución del reloj.

(A<sub>9</sub>) El abogado informa a Peirce el nombre y localización del prestamista.

(A<sub>10</sub>) Peirce visita al prestamista.

(A<sub>11</sub>) El prestamista “describió a la persona que empeñó el reloj de una manera tan gráfica que no quedaba ninguna duda de que había sido ‘[su] hombre’, [i.e. el que Peirce había adivinado que era el ladrón]”.

(C<sub>P1</sub>) La persona que empeñó el reloj es el camarero señalado por mi [por Peirce].

[Este es un hecho sorprendente por ser contrario a las expectativas de todos, incluso originalmente del propio Peirce.]

Si H<sub>P1</sub> es verdadero, C<sub>P1</sub> es verdadero.

Pero C<sub>P1</sub> es verdadero.

---

Por tanto, ¿no es H<sub>P1</sub> verdadero?

Así, el razonamiento abductivo/hipotético encarado por Peirce resultó ser un “*guessing*” (conjetura) acertada. Tiene la particularidad de que su conclusión no es propiamente una interrogación común, sino el tipo particular tal que “los interrogatorios son solicitudes de información” (Pietarinen & Bellucci 2014:

358). Por tanto, en palabras del propio Peirce en la carta mencionada de 1905, “se debe preguntar si A [ $H_{P1}$ ] no es verdadera (...) En lugar de ‘interrogatorio’, el modo de la conclusión podría llamarse más exactamente ‘investigador’.”. En efecto, al fracasar el detective del Sr. Bangs, Peirce continúa indagando hasta que confirma su ‘*guessing*’ y rescata el reloj.

<Paso seguido, Peirce busca rescatar las dos prendas restantes, argumentando también abductivamente de manera similar al caso del reloj, y nuevamente produce dos *guessings* más generando las respectivas hipótesis o conjeturas que explican los demás hechos sorprendidos.>

Podemos interpretar el ejemplo presentado desde la comparación de los dos estilos argumentativos que pueden observarse: por un lado, un estilo deductivista basado en creencias (hipótesis epistémicas *HE*), correspondiente al accionar de Mr. Bangs. Y, por otro lado, un segundo estilo abductivista, que, aunque se apoye en algunas creencias (por demás y por cierto segregacionistas), están argumentadas fundamentalmente por supuestos (*HS*). Esto último queda corroborado por la aplicación misma de abducciones, que requieren de premisas falibles, plausibles y, por tanto, derrotables; a diferencia de las premisas que Mr. Bangs plantea a partir de creencias, en formato deductivo concluyente.

#### 4. A modo de conclusión

El planteamiento peirceano que típicamente se refleja en el ejemplo presentado en su texto *Guessing* (1907), y que aquí ha sido rescatado, consiste en un caso donde la suposición planteada *no* es ni algo tan azaroso como una *apuesta*, ni algo tan certero como una *creencia*, sino algo “intermedio”: una presuposición, un juicio que se hace con anterioridad a poseer una certeza, e incluso aplicable en casos de desconocimiento de ésta. Así Peirce puede mantener en estado *suposicional* (*HS*), un argumento, y no necesariamente convertirlo en una *creencia* (*HE*) para seguir razonando con ella.

El estudio de caso aquí discutido en la sección 3 es representativo de una situación más general que conlleva la resolución de problemas en términos de la postulación de alguna hipótesis que genere un camino de trabajo donde aparentemente no se hallaba ninguno. Es en estas situaciones donde resulta dificultoso comenzar el razonamiento a partir de creencias previas establecidas, dando lugar así a la construcción de hipótesis suposicionales que no requieren de tanto grado de confirmación del conocimiento previo.

En este sentido, resulta estimulante recabar información de este tipo, recurriendo a la historia de la filosofía, especialmente concentrada en el caso de un filósofo de la talla de Charles Sanders Peirce, quien se adelantó en su época a innumerables cuestiones que recién en este siglo parecen estar

suficientemente tematizadas. El recurso a la historia para abordar cuestiones actuales es siempre bienvenido, teniendo en cuenta que estos problemas han permanecido latentes en todas las épocas, y sólo en contados casos adquirieron resoluciones favorables.

## Bibliografía

- Alchourrón, C. E., Gärdenfors, P., & Makinson, D. (1985). On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *The Journal of Symbolic Logic*, 50(2), 510–530.
- Cohen, L. J. (1992). *An essay on belief and acceptance*. Clarendon Press.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Birkhäuser.
- Douven, I. (2016). *The epistemology of indicative conditionals*. Cambridge University Press.
- Douven, I. (2017). How to account for the oddness of missing-link conditionals. *Synthese*, 194, 1541–1554. <https://doi.org/10.1007/s11229-015-0756-7>
- Levi, I. (1991). *The fixation of belief and its undoing*. Cambridge University Press.
- Levi, I. (1996). *For the sake of the argument: Ramsey test conditionals, inductive inference, and nonmonotonic reasoning*. Cambridge University Press.
- Peirce, C. S. (1905, 16 de julio). *Letter to Lady Welby* (MS L 463) [Manuscrito]. Houghton Library, Harvard University.
- Peirce, C. S. (1929). Guessing. *The Hound & Horn*, 2(3), 267–282.
- Peirce, C. S. (1931–1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (Vols. 1–6, C. Hartshorne & P. Weiss, Eds.; Vols. 7–8, A. W. Burks, Ed.). Harvard University Press.
- Pietarinen, A.-V., & Bellucci, F. (2014). New light on Peirce’s conceptions of retrodution, deduction, and scientific reasoning. *International Studies in the Philosophy of Science*, 28(4), 353–373.

# Pureza del método e investigación axiomática en Hilbert: la cara pragmática

Guillermo Nigro Puente

Instituto de Profesores “Artigas” (ANEP), Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación (UdelaR); Montevideo, Uruguay, UFBA; Salvador, Brasil

[guillenigropuente@gmail.com](mailto:guillenigropuente@gmail.com)

Toda exploración rigurosa de la idea misma de pureza del método en la práctica matemática debe hacer frente a dos dificultades: el problema semántico y el problema epistémico. Esta contribución explora una cara del segundo problema en las investigaciones axiomáticas de Hilbert sobre geometría. Clave aquí es entender la relación entre la legitimidad de una demanda de pureza del método y la “regla fundamental” de la investigación axiomática, la cual introduce un formato a los problemas asequibles a tal investigación. Mi punto es que Hilbert adopta una “actitud pragmática” a efectos de juzgar la legitimidad de una demanda purista particular, con arreglo a su fecundidad para la teoría. Esto permite entender la opción metodológica impura de Hilbert respecto al Teorema de Desargues.

**Palabras claves** | Pureza del método; David Hilbert; investigación axiomática; problema epistémico de la pureza; Teorema de Desargues

*Agradezco a Gabriela Fulugonio y Javier Legris por su invitación a exponer en las JECE 2023, de la cual esta contribución es un desarrollo. También a Lena Peichl y Eduardo Giovannini por su asistencia en las transcripciones y traducciones de algunas entradas de los “Diarios científicos” de Hilbert.*

## 1. Introducción

Toda exploración rigurosa de la idea misma de *pureza del método* en la práctica matemática debe hacer frente a dos dificultades: por un lado, debe ofrecer un concepto de contenido adecuado para clarificar la noción de “método puro” como intrínseco al contenido de un teorema, si se trata de una demostración pura, o de un área de las matemáticas, si se trata de una teoría, etc. Este es, pues, el *problema semántico*. Por otra parte, encontramos el desafío de explicar el valor de la pureza del método en la práctica matemática. Evidentemente, el que una demostración, por ejemplo, sea intrínseca al contenido del teorema no es el objetivo primario de la actividad de demostrar teoremas, por lo que debe explicarse en qué radica el *valor* de los métodos puros en la práctica matemática. Este es el *problema epistémico* (véase Nigro Puente 2023a). Por otra parte, las discusiones recientes sobre la naturaleza y valor de la pureza del método encuentran en la figura de David Hilbert un caso de sumo interés. Esto se debe, en parte, a que la concepción más difundida actualmente de pureza parece encontrar en Hilbert una fuente autorizada; así mismo, la obra de Hilbert sobre fundamentos de geometría ha suscitado una literatura que, de forma directa o indirecta, discute el papel de las demandas de pureza en esas investigaciones (v. g. Hallett 2008, Arana y Mancosu 2012, Giovannini 2021 y Lassalle Casanave y Giovannini 2022).

En esta contribución pretendo avanzar tentativamente en una hipótesis respecto a un aspecto --no el único-- del problema epistémico en el contexto del método axiomático, particularmente en lo que refiere a las investigaciones geométricas de Hilbert; este aspecto radica en el valor *pragmático* de las demandas de pureza. La atención al valor pragmático de las demandas de pureza está motivada, en principio, por el hecho de que Hilbert nunca es del todo resolutivo respecto a la legitimidad de esas demandas. En efecto, por un lado, en la *Schlusswort* de sus *Grundlagen der Geometrie* de 1899 Hilbert dice que la demanda de pureza no es más que una modalidad “subjética” de su “regla fundamental” para la investigación axiomática. Esto podría ser suficiente para dar por terminada la discusión; sin embargo, Hilbert consideró y abordó seriamente cuestiones que bien podemos calificar de “puristas”; en efecto, en sus investigaciones sobre teoría algebraica de números Hilbert motivó diversas demostraciones de resultados ya conocidos con arreglo a satisfacer requisitos para avanzar en una aritmetización de la teoría de números (1894a, 1896a), y otro tanto ocurre con su monografía en la que demuestra el Principio de Dirichlet (1904). En sus investigaciones sobre fundamentos de geometría ocurre otro tanto; casos como el teorema de Desargues, el postulado de De Zolt, la teoría euclídea de la proporción o la coordinatización del plano y el espacio en relación con *evitar* emplear el axioma de Arquímedes, son claros ejemplos de

cuestiones puristas (Hallett, 2008; Arana y Mancosu, 2012; Giovannini, 2021; Lassalle Casanave y Giovannini, 2022; Giovannini, 2016). Éstas se encuentran no solamente en las notas de sus cursos sobre fundamentos de geometría, sino que ocupan la mayor extensión en el *Festschrift* y ediciones posteriores.

Una forma de reconciliar ambas cosas, su comentario peyorativo y su práctica matemática en relación con la pureza, podría consistir en atribuirle a Hilbert una “actitud pragmática” respecto a demandas puristas particulares. Una pequeña analogía jurídica ayuda a entender preliminarmente el punto: ante un problema purista suscitado por un teorema, la investigación axiomática “objetiva” funge como una suerte de “perito” (o “testigo experto”) que provee al juez, el matemático, un testimonio experto para decidir sobre la legitimidad de una demanda purista. En este punto, el marco jurídico al que el matemático apela para justificar su decisión es la *fecundidad* matemática de la opción metodológica para resolver más y novedosos problemas, en particular, su capacidad de *generalización*. Según se verá, esta hipótesis ayuda a entender el tratamiento de Hilbert del célebre Teorema de Desargues, como un caso donde una demanda purista realizable resulta *ilegítima* debido a que conspira contra la generalización del teorema y, con ello, contra la función del teorema en la teoría.

A tales efectos, este trabajo sigue el siguiente itinerario: la sección 2 ofrece algo de evidencia textual en favor de la “actitud pragmática” de Hilbert respecto a los principios metodológicos (o “metametodológicos”) que orientan la elección de recursos metodológicos particulares. La sección 3 presenta la “regla fundamental” de la investigación axiomática e introduce la hipótesis de este trabajo descrita en el párrafo anterior. La sección 4 describe muy sintéticamente la situación respecto del teorema de Desargues, mientras que la sección 5 sintetiza los objetivos alcanzados.

## 2. La “actitud pragmática” de Hilbert: un poco de evidencia textual

Hilbert era fundamentalmente un matemático de *problemas* y fue su trabajo sobre problemas particulares lo que moldeó sus convicciones metodológicas. De este modo, su convencimiento sobre las virtudes del método axiomático no emergió de principios *a priori*, sino de su fecundidad para resolver problemas de fundamentos, en particular, su capacidad de generalización a todas las ciencias. En efecto, su aplicación a los fundamentos de geometría representó el primer caso de éxito que debía ofrecer un modelo para su aplicación a otras áreas de las ciencias. Por lo tanto, a la hora de juzgar la valía de un método resulta indispensable considerar su fecundidad para resolver problemas existentes y su potencialidad futura para resolver nuevos problemas. Los estudios de fundamentos también constituyen problemas de la matemática, aunque de un tipo y contexto especial, por lo que no se sustraen de a este punto de vista. En otras palabras, la discusión sobre el método no es una discusión en

sí misma, autónoma o *a priori*, sino que se trata *siempre* de una discusión que tiene como finalidad —y en consecuencia, se zanja en virtud de— la capacidad de los métodos para ser generalizados y para la resolución de nuevos problemas. Es esto último lo que resulta fecundo según Hilbert.

En este punto resulta plausible describir la actitud de Hilbert hacia los problemas metodológicos como si de un *pragmatismo* se tratara (Peckhaus, 1995, 2003). No obstante, es bien sabido que Hilbert entendió la axiomatización de las matemáticas (y de cualquier otra área del conocimiento) como una empresa epistemológica en sí misma, o, por lo menos, como una actividad con implicancias epistemológicas. La investigación sobre fundamentos es, por un lado, demanda el entendimiento (o la Razón) y, por otro, representa una suerte de excavación en el entendimiento, aun cuando no la agote o suplante del todo. De este modo, la interacción entre la pragmática (fecundidad) de un método o principio metodológico y su estatus epistémico, es decir, el que exprese una demanda o ley del “entendimiento” [*Verstand, Geist, o Erkenntnistrieb*], deviene en un factor importante para comprender el pensamiento metodológico de Hilbert<sup>1</sup>. En términos muy llanos, la fecundidad del método *evidencia* (o es *indicio de*) su estatus epistémico de “ley del pensamiento”, mientras que esto último ofrece una justificación maximal para su *sistemática* satisfacción; el método axiomático es el caso por antonomasia, pues, al tiempo que es insustituible también expresa las leyes del pensamiento. Sin embargo, otros principios metodológicos, como la demanda de pureza, no tienen necesariamente este estatus o, si lo tienen, es por su íntima relación con el método axiomático.

Sobre este escenario se despliega el problema epistémico de la pureza (aunque no únicamente de ella) y es donde la actitud pragmática de Hilbert resulta fundamental. Veamos cómo se expresa esta según el propio Hilbert; esta ya la encontramos expresada contundentemente en una etapa muy temprana de su carrera; en efecto, en una entrada del primer tomo de sus “Diarios científicos” [*Wissenschaftliches Tagebuch*], fechado entre 1885 y aproximadamente 1892. Hilbert dice:

Considerar esenciales los métodos y no los resultados es una visión antinatural y poco sana. Quien busca métodos nunca los encontrará, sino sólo quien plantea problemas fundados en la esencia de la cuestión [*begründete Probleme stellt*]. Esta exaltación de los métodos no tiene análogo en ninguna ciencia. Al contrario, la *importancia del método sólo*

---

1 Véase, por ejemplo, Hilbert (1900a, p. 293; 1918). Para un estudio en profundidad sobre la relación entre método axiomático y las leyes del pensamiento en Hilbert, véase Hallett, 1994.

*puede juzgarse a partir de los resultados que proporciona. Volver a la verdad es la tarea y el método sirve [...], pero no es un fin en sí mismo. (Cod. Ms. Hilbert 600–1, p. 34. Énfasis añadido)*<sup>2</sup>

La discusión sobre el método no es una discusión autárquica debido a que carece de una finalidad que le es propia. Por el contrario, la tarea matemática concierne a la resolución de problemas y tales discusiones han de zanjarse con arreglo a los resultados que los métodos en discusión provean. Resulta oportuno señalar que esta entrada se inserta en un contexto de entradas referentes a la metodología “conceptualista” en teoría de números y teoría de funciones, particularmente promovida por Riemann y Dedekind (a la que Kronecker se oponía)<sup>3</sup>. La idea básica de este estilo consiste en re-elaborar las teorías matemáticas para basar los resultados más en conceptos de gran alcance que en cálculos exhaustivos, como decía Dirichlet (1852), se trataba de una tendencia a “poner pensamientos en lugar de cálculos”, reconcibiendo así las teorías anteriores y presentando los resultados en términos más bien abstractos. Uno de los resultados fue que las nuevas teorías “conceptuales” admitían muchas instancias de diferentes tipos (véase Ferreirós, 2022, p. 3). Este tomo de sus diarios contiene varias entradas que formulan este *dictum*; particularmente la entrada inmediatamente anterior a la citada, así como un par de entradas posteriores, donde se puede apreciar que su adhesión al mismo representa una verdadera convicción metodológica en Hilbert. A modo de ejemplo, considérese la siguiente entrada del primer tomo de sus diarios:

La fórmula (cálculo) se justifica como ejemplo o medio [*Hilfsmittel*] [...], pero nunca es una característica del progreso ni un fin en sí misma. Del mismo modo que el desarrollo de los medios no debe hacer olvidar nunca la finalidad, el verdadero objetivo, la disposición de las fórmulas [no debe hacer olvidar nunca] el pensamiento que las guía y las impulsa [*leitende und treibende Gedanke*]. (Cod. Ms. Hilbert, 600–1, p. 36)

Aquí encontramos un principio metodológico (el conceptualismo) que señala que ciertos medios (“la fórmula”) no se justifican en sí mismos, sino con arreglo a un “pensamiento” que lo orienta. Ahora bien, el conceptualismo también es

---

<sup>2</sup> Los tres tomos de estos diarios han sido digitalizados y se encuentran disponibles en <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/volumes/id/DE-611-HS-3180969>.

<sup>3</sup> Sobre la contraposición entre Kronecker y Dedekind a este respecto, puede consultarse Nigro 2023b.

un principio metodológico que expresa una preferencia (metodológica) por los conceptos abstractos en detrimento del simbolismo formal; sin embargo, no debe creerse que esta convicción metodológica se sustrae de la actitud pragmática de Hilbert. En su presentación y justificación ante el rectorado de la Universidad de Gotinga para un curso de verano de 1896, Hilbert propone tres temas posibles: aritmética, geometría euclidiana y teoría de números y ecuaciones. En la justificación de este último encontramos el material a partir del cual se elaboró el Prefacio del *Zahlbericht* de 1897 (Hilbert, 1897); para el presente propósito conviene al texto de 1896. Allí, Hilbert apunta que el estilo conceptual “ha hecho que la teoría de números sea mucho más metódica” (Hilbert 1896b, pp. 154-156); así pues, la valoración de este estilo metodológico se debe al progreso que a suscitado en la teoría de números; en particular, la ha sustraído de sus comienzos “erráticos” hacia un estadio teórico mucho más maduro y estable (Hilbert, 1897, p. ix). Otro tanto ocurre con la idea de aritmetización a partir de la cual extraemos la demanda metodológica según la cual un resultado en teoría de números, análisis o teoría de funciones “no se considera demostrado” a menos que su demostración se remita a relaciones entre números enteros (Hilbert 1896, p. 154; Hilbert, 1891, p. 22). A este respecto, Hilbert dice en el Prefacio del *Zahlbericht* que el progreso procedido “bajo el signo del número” y que este estado de situación justifica la satisfacción sistemática de aquella demanda metodológica sobre las demostraciones (Hilbert, 1897, p. ix).

Todos estos son ejemplos de una cierta “actitud pragmática” por parte de Hilbert respecto a la elección de los medios, en particular, se trata de una actitud hacia principios generales que orientan la elección de recursos metodológicos particulares. Así, el conceptualismo o la aritmetización no constituyen técnicas o recursos conceptuales particulares, sino criterios para seleccionar tales cosas. En una palabra, se tratan de principios meta-metodológicos. En efecto, el conceptualismo no nos dice exactamente que las definiciones de conceptos deban ser conjuntísticas y estructurales al modo de Dedekind, del mismo modo que la consigna de la reducción aritmetizadora nos dice qué es un número entero, ni si está prohibido emplear (definir) otros números, v. g. los reales, a efecto de simplificar las demostraciones (Dedekind, 1888, p. 338; Hilbert, 1891, p. 20). Es en este punto donde se revela una actitud pragmática por parte de Hilbert, en la medida en que apele a un criterio pragmático como principio meta-metodológico. Esto aparece de forma explícita hacia el final del Prefacio del *Zahlbericht* cuando dice

La cuestión de decidir cuál de varias demostraciones es la más simple y natural no puede resolverse en la mayoría de los casos de forma abstracta, sino que sólo después de examinar si los principios subyacentes pueden

generalizarse y utilizarse para investigaciones posteriores obtendremos una respuesta fiable. (Hilbert, 1897, pp. ix –x)

Así pues, la decisión sobre los métodos y demostraciones “más simples y naturales” no puede tomarse —en la mayoría de los casos— a priori o en abstracto, sino que debe atenderse a la fecundidad de sus “principios subyacentes”; esta fecundidad es, básicamente, una generalización potencia y utilidad para resolver nuevos problemas. Luego, adjetivos metodológicos como “simple” y “natural” no pueden mayormente entenderse en abstracto.

La investigación sobre fundamentos no escapa a consideraciones análogas; un buen ejemplo de ello lo encontramos en las siguientes palabras de Hilbert:

En la historia del desarrollo de la ciencia, probablemente siempre ha ocurrido que uno empezaba a trabajar en una disciplina sin muchos escrúpulos y avanzaba todo lo posible, pero que al hacerlo, a menudo sólo después de mucho tiempo, se encontraba con dificultades que le obligaban a dar marcha atrás y reflexionar sobre los cimientos de la disciplina. El edificio de la ciencia no se levanta como una casa, en la que primero se colocan los cimientos y sólo después se procede a la construcción y ampliación de la vivienda; la ciencia prefiere crear lo antes posible habitaciones acogedoras en las que poder trabajar, y sólo después, cuando se hace evidente que aquí y allá los cimientos poco firmes no son capaces de soportar la ampliación de la vivienda, procede a sostenerlos y reforzarlos. Esto no es un defecto, sino un desarrollo correcto y saludable. (Hilbert 1905, p. 102)

Aquí, la investigación en fundamentos es un ejercicio pragmático, ocasional, y no una tarea, digamos, “ordinaria” de los matemáticos (Peckhaus, 1995, 2003; Corry, 2006, pp. 145-146). El objetivo de la actividad ordinaria es expandir los resultados, esto es, resolver problemas abiertos de una ciencia, mientras que el objetivo de la investigación en fundamentos es “fortificar” los fundamentos que se aprecian “débiles”, de forma tal que los fundamentos de la disciplina puedan soportar la expansión de las habitaciones. Esta práctica matemática está motivada por problemas, v. g., las paradojas conjuntísticas sobre el infinito (principio de comprensión, en particular) motivaban, según Hilbert, una modificación de los “métodos usuales [i. e. conjuntísticos] de razonamiento en la teoría de los números irracionales”, en particular, una modificación en las

demostraciones de consistencia hacia pruebas de tipo sintáctico<sup>4</sup>. Ahora, la investigación en fundamentos tiene un doble objetivo: fortalecer los fundamentos a efectos de *reconstruir sistemáticamente* el edificio teórico y permitir que esta soporte la *expansión* de las habitaciones. Esto último es lo que Hilbert parece tener en mente en el pasaje del *Zahlbericht* citado arriba. Pero la exaltación del método axiomático no nos dice nada respecto a qué axiomas particulares seleccionar en cada caso; de este modo, la promoción del método axiomático es la proposición de un principio “metametodológico”, análogo a los ejemplos anteriores.

Antes de finalizar esta sección debemos pasar a considerar el caso de la pureza del método. En diversas ocasiones Hilbert dice que la demanda de pureza metodológica es muy importante para los “matemáticos modernos” (véase sección 3 y 4), mientras que en ocasiones la pureza parece ser un requisito impuesto a la idea misma de “solución” de un problema (1900a, p. 293). Sin embargo, además del pasaje del *Festschrift* que examinaré abajo, hay otros dos donde Hilbert parece adoptar una posición pragmática. En rigor, lo que encontramos cuando consideramos los pasajes relevantes en su totalidad, es una suerte de “doble cara” del valor de la demanda purista: por un lado, algunos aspectos de esta descansan en una “demanda del entendimiento”, pero otros enfatizan que esas demandas deben responder a su fecundidad matemática, por lo que su preferencia sistemática resulta problemática<sup>5</sup>. Uno de los pasajes es el siguiente:

[...] en muchos casos no satisface a nuestro entendimiento [*Verstand*] que se utilice la geometría para demostrar un teorema aritmético o la teoría de las funciones para demostrar una verdad geométrica. A menudo, por supuesto, hay una razón más *profunda y justificada* para utilizar diferentes tipos de medios auxiliares, y se revelan *hermosas y fecundas relaciones*, por ejemplo, el problema de los números primos y la función  $\zeta(x)$ , la teoría del potencial y las funciones analíticas, etc. En cualquier caso, nunca hay que dejar pasar por alto un suceso de este tipo en el que se

---

<sup>4</sup> Véase Hilbert (1900b, p. 184). Para una discusión sobre esta primera aparición de una noción “sintáctica” de consistencia, véase Sieg (1990, §1.2) y Ferreirós 2009.

<sup>5</sup> En otros trabajos enfatizo la relación de la demanda purista con el entendimiento; en particular, señalo que las demandas puristas en Kronecker, Dedekind y Hilbert responden a una concepción “arquitectónica” de las teorías matemáticas como edificios autónomos lógicamente contruidos a partir de fundamentos sólidos. El rol de la pureza aquí radica en garantizar la autonomía y unidad conceptual de las teorías, al eliminar (o reducir) la interferencia de nociones “ajenas” a la temática (contenido). Véase, Nigro Puente, 2023b.

entrecruzan diferentes áreas [matemáticas]. (Hilbert, 1899b, p. 236. Énfasis añadido)

Este es un claro ejemplo de esa “doble cara”, pues si bien en “muchos casos” las demandas puristas responden a una demanda del propio “entendimiento” (autonomía y unidad metodológica de la teoría), a menudo también ocurre que los métodos impuros reciben una “razón más profunda y justificada”. Esta razón, dice aquí Hilbert, radica en que tales métodos permiten hallar “hermosas y fecundas relaciones” entre distintas áreas de las matemáticas (e incluso la física, como en la teoría del potencial y el principio de Dirichlet).

El otro pasaje, hasta donde sé no citado en la literatura, aparece en el segundo tomo de sus “Diarios científicos” (*circa* 1892-1916), que podría datarse, por el contexto de las entradas anteriores y posteriores con anterioridad a 1900.

Se habla tanto de la pureza del método, pero el aspecto insatisfactorio no es, como a menudo se supone erróneamente, la extrañeza de la herramienta [*Fremdartigkeit des Hilfsmittels*], sino la falta de generalizabilidad [*Verallgemeinerungsfähigkeit*] y, en relación con ello, la formalidad. El aspecto verdaderamente insatisfactorio existe. (Cod. Ms. Hilbert, p. 97)<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup> Transcripción: Man spricht so viel von der Reinheit der Methode, doch ist das unbefriedigende nicht wie oft man fälschlicherweise annimmt die Fremdartigkeit des Hilfsmittels sondern der Mangel an Verallgemeinerungsfähigkeit und damit in Zusammenhang das formal hergeholte. Das wahrhaft unbefriedigende besteht.

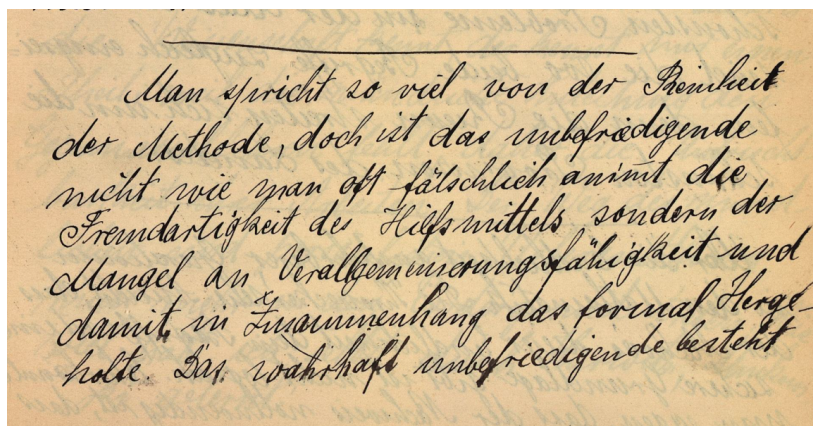


Figura 1. Cod. Ms. Hilbert, 600-2, p. 97, *infra*. Esta y la Figura 2 conforman una misma entrada.

Esta entrada merece un examen más detallado en su contexto, pero, por lo pronto, resulta elocuente respecto a tres cosas: i) el aspecto “insatisfactorio” de los métodos impuros no es espurio, sino serio; ii) tal aspecto no consiste en que los medios sean “extraños”, o “ajenos” (al contenido); iii) lo que resulta insatisfactorio en general, y con los métodos impuros en particular, es la falta de capacidad para *generalizar* los mismos. Particularmente enigmático es esto último, a lo que volveré brevemente en las próximas secciones; de todas formas, aquí se aprecia nuevamente el énfasis en la generalización de los métodos y, en conexión con ello, se observa que esto último es más importante que el carácter “intrínseco” de los métodos. Esto es fundamental para entender el caso del teorema de Desargues.

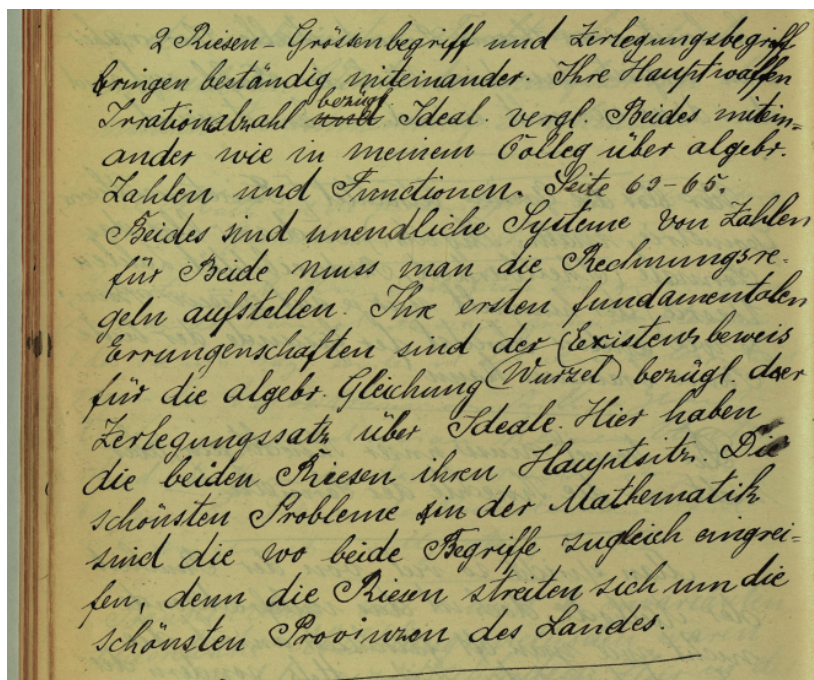


Figura 2. Cod. Ms. Hilbert, 600-2, p. 98, *supra*<sup>7</sup>.

En esta sección he procurado ofrecer evidencia textual de cierta “actitud pragmática” por parte de Hilbert respecto a la elección de los métodos y, en particular, respecto a la demanda de pureza del método. Esta actitud de Hilbert favorece la capacidad de generalización y utilidad para a resolución de nuevos problemas, lo cual resulta muy relevante en la investigación sobre fundamentos debido a que el éxito de tal investigación no puede sustraerse de su fecundidad matemática. No obstante, debe enfatizarse dos cosas: la actitud pragmática apunta a que la decisión sobre el método no sea *a priori* o en abstracto; sin embargo, Hilbert no era un “pragmático” pues hay principios o métodos que se adecuan o expresan leyes del pensamiento. En buena medida, la pureza del

<sup>7</sup> Transcripción: 2 Riesen - Größenbegriff und Zerlegungsbegriff ringen beständig miteinander. Ihre Hauptwaffen Irrationalzahl bezüglich Ideal vergleichen beides miteinander wie in meinem Kolleg über algebraische Zahlen und Funktionen. Seite 60-65 Beides sind unendliche Systeme von Zahlen, für beide muss man die Rechnungsregeln aufstellen. Ihre ersten fundamentalen Errungenschaften sind der Wurzel-Existenzbeweis für die algebraische Gleichung bezüglich der Zerlegungssätze über Ideale. Hier haben die beiden Riesen ihren Hauptsitz. Die schönsten Probleme in der Mathematik sind die wo beide Begriffe zugleich eingreifen, denn die Riesen streiten sich um die schönsten Provinzen des Landes.

método es entendida por Hilbert en estos dos niveles, cosa que sugiere de por sí una explicación de por qué Hilbert parece no ser del todo resolutivo respecto a su legitimidad.

### 3. La “regla fundamental” del método axiomático

La idea misma de método axiomático encierra una rica dualidad de sentido no siempre explorada: por un lado, remite a una manera de entender la estructura de las teorías matemáticas; en este sentido, entonces, la expresión “método axiomático” remite a un modo de presentación de las teorías matemáticas. El otro sentido apunta a la “investigación axiomática” en fundamentos de las matemáticas. En consecuencia, por “método axiomático” podemos entender la teoría o la investigación axiomática. Hacia el final de sus *Fundamentos* Hilbert formula la “regla fundamental” [*Grundsatz*] que está detrás (orientó) la investigación axiomática cuyo producto es el sistema de geometría.

El tratado que precede es una investigación crítica de los principios de la geometría; en esta investigación nos hemos guiado por regla fundamental [*Grundsatz*] de discutir cada cuestión que se presenta de tal manera que se averigüe al mismo tiempo si su respuesta es posible de una manera prescrita con ciertos medios limitados. Esta regla fundamental me parece que contiene una regla general y natural; en efecto, cuando en nuestras consideraciones matemáticas nos encontramos con un problema o conjeturamos un teorema, nuestra naturaleza racional [*Erkenntnistrieb*] sólo se satisface cuando, o bien conseguimos resolver completamente ese problema y demostrar rigurosamente ese teorema, o bien cuando hemos reconocido claramente la razón de la imposibilidad del éxito y, por tanto, al mismo tiempo, la necesidad del fracaso. (Hilbert, 1899, p. 523)

A partir de este pasaje es posible destacar algunos aspectos muy relevantes de la regla fundamental. Esta no introduce una suerte de propiedad metateórica de las teorías axiomáticas, sino un formato para los problemas tratables en la investigación; es así que la misma funge como una “guía” para la investigación. Grosso modo, este formato conduce al estudio de las relaciones de dependencia deductiva entre proposiciones (teoremas, axiomas); así pues, dada una proposición  $\varphi$  y un conjunto de proposiciones  $\Gamma$ , la regla fundamental nos dice que el problema para la investigación axiomática es determinar si  $\varphi$  es o no lógicamente independiente de  $\Gamma$ . Luego, ante un problema o conjetura, o bien conseguimos demostrar rigurosamente la proposición pertinente a partir de ciertos medios predelimitados, o bien se muestra que tal demostración es imposible, es decir, constatamos “la necesidad del fracaso”; estos medios preestablecidos son los axiomas. Puede decirse, entonces, que las proposiciones de una teoría articulada conforme la regla fundamental siguen

un “orden lógico” o, en palabras de Hilbert, la teoría ordena lógicamente los “hechos” de una esfera de conocimiento (Hilbert, 1918, p. 146)<sup>8</sup>.

Al mismo tiempo, esta regla introduce un *formato* para los problemas asequibles a la investigación axiomática: esos problemas son problemas de *independencia* deductiva. Así, la regla fundamental pone en el centro la demostración y los resultados de independencia, siendo la independencia de los axiomas un caso (destacado) de su aplicación. El momento demostrativo involucra dos tipos de resultados: por un lado, resultados de *dispensabilidad* de algún axioma para obtener un teorema; estas operan *dentro* de la teoría como ocurre, por ejemplo, con la demostración del teorema de Pappus sin emplear el axioma de Arquímedes (1899, §14, pp. 463-64). Por otro lado, resultados de *indispensabilidad* donde encontramos las célebres demostraciones *metateóricas* de imposibilidad; por ejemplo, el teorema 54 en los *Fundamentos*, acerca del teorema de Desargues (Hilbert, 1971, §23), o las investigaciones sobre los triángulos isósceles y el teorema de las tres cuerdas (véase Hallett, 2008, §8.4).

Esta estructura es extremadamente simple, pero la misma está en el corazón del proyecto axiomático de Hilbert para la geometría. Una descripción general (abstracta) del propio Hilbert sobre su proyecto axiomático de la geometría euclidiana permite apreciar esto.

[. . .] tomando por dado las leyes de la lógica pura y toda la aritmética tomadas de [Dedekind, 1888], la cuestión radica en ¿qué proposiciones debemos “adjuntar” al dominio definido anteriormente para obtener la geometría euclidiana? (Hilbert, 1898/1899a, p. 303)<sup>9</sup>

Esta cita contiene una explícita aprobación de Hilbert de la posición logicista de Dedekind respecto de la aritmética en sentido general; en efecto, por “toda la aritmética” Hilbert comprendía la teoría de cuerpos de números reales o complejos (algebraicos, enteros) y, con ello, las bases para el análisis y el álgebra<sup>10</sup>. El marco conjuntístico abstracto (lógico) empleado por Hilbert en esta descripción deja claro que la axiomatización de la geometría no procede según directrices distintas a la axiomatización de la aritmética en sentido amplio, tal como enfatiza en la *Einleitung* del *Festschrift* (Hilbert 1899, p. 436). La regla fundamental resulta inseparable del proyecto axiomático descrito en la cita de

---

<sup>8</sup> El pasaje también resulta informativo respecto de la impronta epistemológica de la regla. En primer lugar, Hilbert dice que la regla responde a nuestra “naturaleza racional” [Erkenntnistrieb], por lo que aquí también encontramos una referencia a las “leyes del pensamiento”. Por otra parte, la regla introduce también un concepto de solución del cual el célebre Ignorabimus o “axioma de resolución de todos los problemas” es sin duda deudor.

<sup>9</sup> Véase también Hilbert 1902/2004, p. 541.

<sup>10</sup> Sobre la influencia logicista de Dedekind en Hilbert puede consultarse Ferreirós 2009.

arriba. En efecto, cada nueva proposición que debe ser adjuntada al dominio no es otra cosa que un axioma en la futura teoría; caso contrario, esa proposición no es independiente de las demás y, por lo tanto, no es estrictamente (lógicamente) necesaria para obtener la teoría euclidiana de la proporción, por ejemplo. Esta es la conocida idea de que la teoría es “cerrada” por su base axiomática (y una lógica o noción de consecuencia implícita, al menos); Hilbert nos recuerda constantemente esto en el *Festschrift* al destacar recurrentemente la base axiomática sobre la que se apoyan sus resultados. Así pues, el formato de problema inducido por la regla fundamental nos dice que una proposición  $\varphi$  “debe” ser adjuntada al conjunto de axiomas  $\Gamma$ , solo si  $\varphi$  es independiente de  $\Gamma$ . En definitiva, la regla fundamental no solamente tiene un rol fundamental en el formato de los problemas asequibles a la investigación axiomática, sino también en la formulación general de su proyecto axiomático.

Sobre esta base es posible aclarar un poco lo que Hilbert dice respecto a que es la generalidad y no la “extrañeza” del método lo que resulta insatisfactorio con los métodos *impuros* (véase sección 2). La adjunción de nuevos axiomas a los sistemas dados sigue una progresión de lo axiomas más generales (y deductivamente más débiles) a lo más particular (y deductivamente más fuerte); en efecto, el *orden* de los grupos de axiomas sigue esta progresión de lo general a lo particular. De este modo, el programa axiomático hilbertiano para la geometría sigue el patrón de las geometrías no euclidianas a la euclidiana, al modo de von Staudt y Klein, donde la geometría más general es la geometría proyectiva. En diversas ocasiones Hilbert expresa que su investigación axiomática sigue el modelo de las investigaciones en fundamentos de geometría no euclidiana (v.g. 1897, p. x); pero este orden lógico aparece referido explícitamente en el segundo tomo de sus diarios científicos, donde dice que primero, siempre se abarca el campo de conocimiento general [*allgemeinen Wissensgebiet*], para luego, por adjunción de un ciertos “conceptos invariantes” [*invarianten Begriffes*] (¿axiomas?), descendemos a la disciplina particular, como por ejemplo mediante la esfera de radio imaginario descendemos de la geometría proyectiva a la euclidiana. (Cod. Ms. Hilbert, 600-2, p. 107). Así pues, una demostración de un teorema *proyectivo*, por ejemplo, que emplee un axioma impuro será una demostración *menos general* que una demostración pura. Esta sería manera tentativa de entender por qué Hilbert parece sugerir que la verdadera dificultad está en la generalidad del método. Esta situación parece emerger como producto de una adaptación de la idea de “demostración pura” al proyecto axiomático.

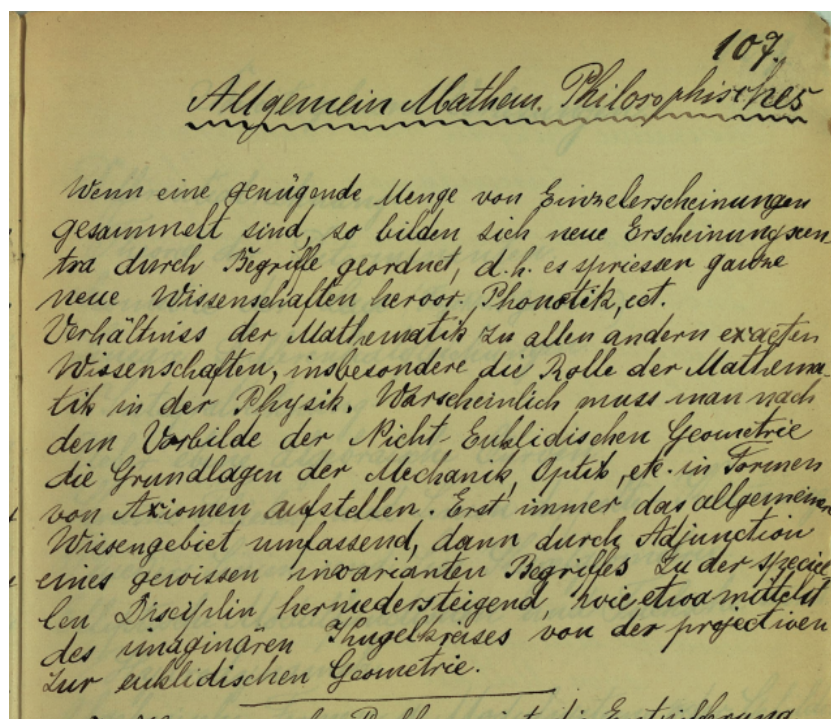


Figura 3. Cod. Ms. Hilbert, 600-2, p. 107

Antes de finalizar esta sección es necesario atender a la relación entre pureza y regla fundamental; aquí, el pasaje fundamental se encuentra también en hacia el final de los *Fundamentos*:

La regla fundamental según la cual los principios de la posibilidad de una demostración deben discutirse en absoluto está íntimamente relacionada con el requisito de la "pureza" de los métodos de demostración que muchos matemáticos han defendido con gran énfasis. En el fondo, este requisito no es más que una forma subjetiva de la regla básica que se sigue aquí. De hecho, la presente investigación geométrica trata de descubrir qué axiomas, hipótesis o medios auxiliares son necesarios para la demostración de un hecho en geometría elemental, y en cada decisión queda abierta la cuestión de qué método de demostración es preferible, desde el punto de vista adoptado. (Hilbert, 1899, p. 523)

Es notable que el propio Hilbert relacione la demanda de pureza con la regla fundamental, pues muestra --como mínimo-- la importancia de este tipo de demandas para Hilbert, al tiempo que la aclaración sería útil a sus lectores contemporáneos. Sin duda la correcta comprensión de este comentario de Hilbert representa el núcleo problemático de la actitud de Hilbert frente a la demanda purista. El punto clave es, según se lee explícitamente en la cita, que una demanda purista es una forma subjetiva (idiosincrática) de la regla fundamental, es decir, de la demanda de esclarecer las relaciones de dependencia deductiva. Esto último ofrece un panorama “objetivo” de las distintas alternativas demostrativas necesarias para demostrar una proposición, por lo que la opción por una de ellas en particular, por lo que la cuestión de qué método de demostración es preferible permanece “abierta”. Esta situación sugiere al menos tres escenarios posibles respecto de la legitimidad de una demanda de pureza en el contexto de una investigación axiomática: por un lado, que la regla fundamental sea una suerte de “versión axiomática” de la demanda purista, la cual es preferible por ser más “objetiva” (Hallett, 2008); otra lectura podría ser: en general, podemos aprender tanto de la demostración impura como de la pura; por tanto, una preferencia sistemática por lo segundo no está justificado, y en ese sentido es “subjetiva” (Detlefsen y Arana, 2011, p. 7)<sup>11</sup>. Una tercera lectura puede emerger a partir de algunas dificultades que estas presentan, por lo que conviene decir algo más de cada una de ellas.

El aspecto crucial de Hallett radica en que la regla fundamental es una respuesta al problema semántico de la pureza; así pues, un conjunto de axiomas resultan intrínsecos al contenido de un teorema en la medida en que estos son indispensables para su demostración. Es en este sentido que la regla fundamental ofrece un abordaje “objetivo” de lo que, de otro modo, es un juicio “informal” o “intuitivo” respecto a lo que es propio o ajeno al contenido del teorema. De este modo, la investigación axiomática permite revelar aspectos del contenido que pueden estar “implícitos”. En consecuencia, la regla fundamental no es otra cosa que la versión objetiva de la demanda de pureza, por lo que las demandas de pureza serían tan legítimas como los resultados de la investigación axiomática<sup>12</sup>. Por otro lado, crucial en Detlefsen y Arana y en

---

<sup>11</sup> Esta posición también la encontramos en Arana y Mancosu (2012, p. 326, n. 33).

<sup>12</sup> Esta posición no parece ser del todo satisfactoria como respuesta al problema semántico; en efecto, si el contenido no es otra cosa que las condiciones “necesarias y suficientes” para demostrar el teorema, entonces todo teorema tiene garantizado a priori la existencia de una demostración pura. Tal como apuntan Arana y Mancosu esto trivializa el propio concepto de demostración pura. Ellos, en cambio, entienden adecuado introducir la idea de contenido informal como la comprensión “básica” del enunciado con arreglo a la cual un principiante puede “pretender seriamente” [well-intentionned] demostrarlo, aun cuando fracase en

buena medida, más fieles a las palabras de Hilbert en la cita de arriba, es el énfasis en la una generalidad involucrada en la regla fundamental que no ocurriría con las demandas de pureza. Más exactamente, los medios “predeterminados” o “limitados” mencionados por Hilbert podrían representar una restricción a los métodos puros, pero no tienen por qué representar sólo eso. La restricción purista es solo un tipo de restricción; y aun cuando la restricción purista puede ofrecer algo que aprender, también lo hacen otros tipos de restricciones. En efecto, la regla fundamental no apunta a un tipo peculiar de restricción, es decir, no nos dice por qué seleccionar estos a aquellos axiomas a la hora de plantear el problema de independencia. En consecuencia, puede decirse que la lectura de Detlefsen y Arana concierne al problema epistémico de la pureza.

A estas dos lecturas puede interpolarse una tercera que, por un lado, acuerda con la segunda y contra Hallett en poner el énfasis en la cuestión epistémica; pero, por otro lado, acuerda con el espíritu de Hallett respecto a que la regla fundamental debe poder decirnos algo acerca de la legitimidad de una demanda purista, aunque Hallett no avanza concretamente en esta dirección. Esto está ausente en la explicación de Detlefsen y Arana, pues se mantiene silente respecto a en qué contexto es legítima una demanda purista. Sin embargo, la sección anterior muestra que el propio Hilbert reconoce casos donde las demandas son legítimas y casos donde no lo son, esto es, contextos donde la restricción purista resulta fecunda y contextos donde la misma resulta estéril, o los métodos impuros son fecundos. En consecuencia, la “actitud pragmática” de Hilbert es clave aquí, pero antes de avanzar un poco a este respecto, es necesario especificar dónde se ubica esta actitud pragmática dentro en relación a las demandas de pureza y la regla fundamental.

En términos abstractos, una demanda de pureza para un teorema en particular emerge a partir del contenido informal o “intuitivo” del mismo, en un sentido cercano al de Arana y Mancosu; la investigación axiomática bajo el auspicio de la regla fundamental impone plantear el problema en términos de independencia deductiva entre un conjunto de axiomas (probablemente inducidos por el contenido informal del teorema). Apelando al formato introducido por la regla fundamental, la investigación axiomática apunta, por un lado, a establecer “objetivamente” si alguno de los axiomas elegidos resulta dispensable o no y tal cosa ofrece evidencia en favor o en contra respecto a si el contenido informal coincide o no con las suposiciones necesarias para demostrar el teorema; por otro lado, la dinámica de la investigación axiomática también provee la comparación entre distintas bases axiomáticas (no

---

intentos particulares. Véase, Arana y Mancosu (2012, pp. 335-336). Cfr. Nigro Puente, 2023a, §4.

azarosamente consideradas). Con un este tipo de información, el matemático decide qué base axiomática tomar en consideración para la construcción de la teoría; aquí es donde entran las consideraciones pragmáticas. Aquellas que resultan fecundas son legítimas e imponen ser satisfechas, mientras que aquellas que no resultan fecundas, pueden ser desatendidas sin que ello constituya una suerte de error metodológico. En este sentido, la regla juega el papel de “testigo experto” para el juez matemático, siendo las demandas puristas aquello cuya legitimidad, es decir, cuyo valor para la construcción de la teoría, es objeto de juicio por parte del investigador. En consecuencia, la regla fundamental ofrece un formato asequible al método axiomático para abordar demandas puristas, pero en rigor no es un sustituto para ellas, ni las relega a un estatus meramente idiosincrático.

En mi opinión, una lectura como esta hace justicia tanto a la práctica matemática de Hilbert como a sus dichos acerca de la pureza del método en general; al mismo tiempo, también ayuda a iluminar las virtudes y las flaquezas de las dos lecturas consideradas anteriormente. En la próxima propongo una ilustración esquemática de la lectura propuesta para el caso del teorema de Desargues en el plano.

#### 4. Una ilustración rápida de demanda purista “estéril”

Junto con el postulado de De Zolt y la introducción de sistemas de coordenadas en ausencia del axioma de Arquímedes, las investigaciones axiomáticas sobre el teorema de Desargues en el plano constituyen casos claros de problemas puristas. Este teorema es uno de los teoremas fundamentales del sistema del *Festschrift* y, según el propio Hilbert, el sistema es un producto de la investigación axiomática sobre este teorema y el teorema de Pappus (1902a, p. 50). El punto de esta sección es ilustrar cómo la actitud pragmática de Hilbert motivó su desatención a una demanda purista sobre su demostración. En las primeras páginas unas notas de clase inmediatamente anteriores a la publicación del *Festschrift*, encontramos el problema purista sucintado por el *contenido* del teorema de Desargues.

**Teorema de Desargues.** Si dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  se encuentran en un plano de tal forma que dos lados correspondientes  $AB$  y  $A'B'$ ,  $AC$  y  $A'C'$ ,  $BC$  y  $B'C'$  se cortan en tres puntos  $E$ ,  $D$  y  $F$  de una recta, entonces las líneas de unión de los ángulos correspondientes,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  o bien no se encuentran, o bien pasan todas por el mismo punto  $M$ . (Hilbert, 1898/1899a, p. 313)

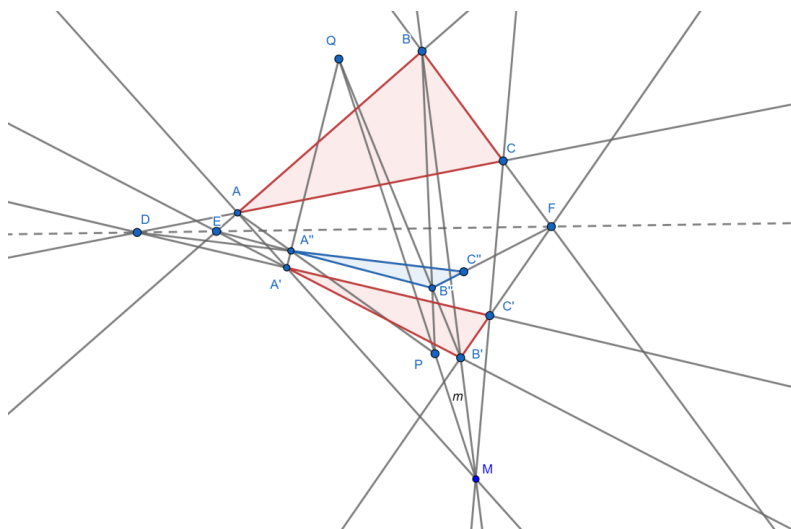


Figura 4. Diagrama de la demostración espacial del teorema de Desargues extraído de Hilbert (1898/1899a, p. 314).

La demostración (incompleta) de Hilbert en estas notas apela a un tercer triángulo  $A''B''C''$  situado en un plano distinto al de  $ABC$  y  $A'B'C'$ , y en relación de perspectiva con  $ABC$  (a partir de un punto  $P$ ), y con  $A'B'C'$  a partir de un punto  $Q$ , ninguno de los cuales está en el plano de los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$ . Así pues, el esbozo de demostración de Hilbert apela a proyecciones en el espacio (véase la Figura 3). A continuación, Hilbert introduce el problema purista y su correspondiente formulación según el formato de la regla fundamental.

Esta proposición nos da ahora la oportunidad de discutir una cuestión importante. El contenido [*Inhalt*] del teorema de Desargues pertenece a la geometría plana, pero hemos utilizado el espacio para demostrarlo. Aquí, por tanto, estamos por primera vez en condiciones de criticar los medios de una demostración. En la matemática moderna se practica muy a menudo este tipo de crítica, en la que se intenta preservar la pureza del método, es decir, utilizar en la demostración de un teorema sólo aquellos medios sugeridos [*nahe gelegt*] por el contenido [*Inhalt*] del teorema. Este esfuerzo ha sido a menudo exitoso y fructífero para el progreso de la ciencia. Si examinamos ahora nuestra proposición desde este punto de vista, nos proponemos la siguiente tarea: o bien demostrar Desargues únicamente mediante los axiomas planos, o bien demostrar que tal demostración es imposible. ¿Cómo podemos demostrar ahora que un teorema que es correcto en sí mismo es indemostrable con ciertos medios? Evidentemente, tendremos que aplicar el mismo principio que en las pruebas de independencia [...], es decir, especializarlo para el caso que nos

ocupa: Tendremos que construir una geometría plana en la que se cumplan [satisfagan] todos los axiomas planos (I, 1., 2., II, 1.-5.), mientras que el teorema de Desargues no se cumple. (Hilbert, 1898/1899a, pp. 315-316)

La cita es extensa pero contiene el razonamiento de Hilbert sobre el problema purista suscitado por el teorema de Desargues, aunque no la decisión “final” sobre la base axiomática y la función del teorema en la teoría; en efecto, se trata de un “momento” de la investigación axiomática. En primer lugar, Hilbert destaca de su presentación y demostración del teorema en las páginas anteriores, diciendo que el *contenido* del mismo “pertenece completamente a la geometría plana” pero su demostración ha empleado *conceptos espaciales* (axiomas de incidencia espaciales)<sup>13</sup>. El caso es que lo primero es una “atribución de contenido” al teorema que consiste en *clasificarlo* como un enunciado de la geometría plana. Siguiendo a Arana y Mancosu, podríamos decir que la atribución de contenido se basa en el *contenido informal* del enunciado, pues su comprensión “básica” no requiere de conceptos de la geometría espacial (véase n. 12 arriba). Considerando la caracterización de demostración pura que Hilbert da, resulta inmediato que *esa* demostración es *impura*. Este escenario provoca la interrogante purista, a saber, ¿hay una demostración puramente plana del teorema? Una respuesta axiomática (y objetiva) a esta interrogante sobre la *existencia* de una demostración pura requiere ser reformulada según el formato de la regla fundamental. Esto supone seleccionar un conjunto de axiomas; Hilbert apela a los axiomas del plano y lineales que viene considerando y que entiende forman la “esencia de la geometría proyectiva” plana (Hilbert, 1898/1899a, p. 391)<sup>14</sup>, por lo que ahora tenemos una clasificación “axiomática” del enunciado arguiano. Por último, el resultado de imposibilidad muestra que el enunciado es *independiente* de esos axiomas. En consecuencia, no hay una demostración en el plano proyectivo del teorema; luego, los axiomas espaciales son una condición necesaria.

Como resultado de esta investigación obtenemos que *no podemos* construir una geometría del plano proyectivo *autónoma* a partir de los axiomas I, 1., 2., II, 1.-5 y el teorema de Desargues como teorema fundamental. Este es un “hecho” que la investigación axiomática establece objetivamente e implica que la demanda purista de autonomía es un *error* inducido por el contenido informal del enunciado, pero corregido por la investigación axiomática. Sin embargo, este es solo un “momento” de la investigación de Hilbert, pues su propósito es obtener la geometría *euclidiana*. Así pues, como un teorema de *configuración*, su función concierne en la definición de un cálculo de segmentos cuyas propiedades

---

<sup>13</sup> Esta era una práctica habitual en la época, especialmente en lo contextos proyectivos, donde el teorema se empleaba para introducir el concepto de cuarto punto armónico.

<sup>14</sup> En rigor, es un fragmento de geometría absoluta.

*algebraicas* permita introducir un sistema de coordenadas sin apelar a supuestos que, como el de Arquímedes, introducen una relación entre puntos de una línea y números<sup>15</sup>. Esta es *otra* demanda purista que la investigación axiomática revela posible y Hilbert lo muestra para el *plano arguiano* (1899, § 27).

En este punto emerge bajo una nueva forma la cuestión purista de una demostración exclusivamente plana del teorema, pero no proyectiva, sino euclidiana<sup>16</sup>. Es muy importante observar que para diciembre de 1898 Hilbert ya sabía que el teorema *podía* ser demostrado a partir de los axiomas incidencia en el *plano* junto con todos los axiomas de congruencia de su sistema (incluyendo el análogo de la Proposición I. 4 de los *Elementos*). Adicionalmente, también sabía que el cuerpo de teoría de la geometría plana euclidiana podía obtenerse en este contexto; tal cosa queda en evidencia en una carta a Adolf Hurwitz (Toepell, 1986, pp. 198-99), pero también aparece en el *Festschrift* (1899, § 34), aunque Hilbert no lo destaca aquí como algo notable del mismo modo que sí lo hace en la carta. Sin embargo, y esto es lo importante, Hilbert *decidió* no dar cabida a esta demanda purista echando por tierra la preferencia sistemática por los métodos puros. ¿Por qué?

En mi opinión, una respuesta razonable nos devuelve a la última cita de la sección 2: la satisfacción de la anterior demanda purista resulta *estéril* para la construcción del sistema. En efecto, por un lado, la base axiomática concidiría con la base sobre la cual demuestra el teorema de Pappus (el otro teorema fundamental de su sistema). En particular, el teorema de Pappus implica el teorema de Desargues, pero el recíproco no se da (1899, §34); en consecuencia, el primero seguiría siendo indispensable en el esquema teórico de Hilbert, pero el segundo sería *redundante*, --i. e. no tendría un rol distinguido. Por otro lado, debe recordarse que otra línea de investigación axiomática quedó sugerida por el resultado de independencia: ¿son los axiomas espaciales *suficientes* (además de necesarios) para demostrar el teorema de Desargues, a partir de los axiomas de incidencia planos y los axiomas lineales de orden? La respuesta es que sí, pues una geometría espacial permite demostrar el teorema, al tiempo que un plano arguiano está *embebido* en un espacio euclidiano (Teorema 35 del *Festschrift*, § 30). Por lo tanto, los axiomas espaciales son *equivalentes* al enunciado arguiano. Luego, la validez del teorema de Desargues es condición necesaria y suficiente para que esta geometría plana (arguiana) pueda considerarse *parte de una geometría espacial* en la que se cumplen los axiomas I, II, III (incidencia, orden y paralelas, respectivamente en el *Festschrift*). Es esto

---

<sup>15</sup> Esa estructura es la de un anillo de división.

<sup>16</sup> En rigor, una formulación afín, donde  $AB \parallel A'B'$ ,  $AC \parallel A'C'$  y donde se demuestra que  $BC \parallel B'C'$ .

último, dice Hilbert, es lo que “debe considerarse como el objetivo final de todos los desarrollos” del capítulo del *Festschrift* dedicado al teorema de Desargues (1899, § 30). Tal como explicita el título de esta sección del *Festschrift*, el tratamiento de Hilbert del teorema arguino apunta a la “importancia” [*Bedeutung*] del teorema para la teoría; su función a juicio de Hilbert es que

[...] *toda* geometría espacial en la que se cumplan los axiomas I, II, III puede considerarse siempre parte de una “geometría de *cualquier* número de dimensiones”. Por geometría de *cualquier* número de dimensiones debe entenderse un conjunto de puntos, rectas, planos y otros elementos para los que se satisfacen los correspondientes axiomas *ampliados* de incidencia, orden, así como el axioma de paralelismo. (Hilbert, 1899, p. 505)

El punto aquí es que la base axiomática que incluye los axiomas espaciales permite *generalizar* el teorema de Desargues con arreglo a introducir un sistema de “números arguianos” (cálculo de segmentos mediante) a una geometría de “cualquier número de dimensiones”<sup>17</sup>. Puede pensarse, entonces, que la generalización funge como un criterio prioritario contra las demandas de pureza que priorizan una base axiomática alternativa, basaba únicamente en axiomas de la geometría plana. En otras palabras, la investigación axiomática bajo el formato de la regla fundamental ofreció un panorama objetivo respecto a “qué axiomas, hipótesis o medios son necesarios para la demostración de un hecho en geometría elemental”. Este panorama resulta informativo respecto a las demandas de pureza: una de ellas resultó *imposible*, otras resultaron viables, pero la verdadera fecundidad del teorema para la construcción de la teoría implica *deslegitimar* una demanda de pureza *realizable*. Esto último es la *decisión pragmática* del matemático.

En definitiva, el caso del teorema de Desargues ofrece una ilustración no solo de cómo la regla fundamental ofrece un formato asequible a la investigación axiomática de un problema purista, sino también ilustra cómo una opción metodológica impura es priorizada por razones pragmáticas. De este modo, la lectura aquí esbozada resulta preferible a las de Hallett, por un lado, y Detlefsen y Arana, por otro; en efecto, la primera no da lugar a poder plantear la diferencia conceptual entre método puro e impuro, como observan Arana y Mancosu; pero la segunda no permite vislumbrar la diferencia entre las demandas legítimas e ilegítimas de pureza.

---

<sup>17</sup> En rigor, lo que Hilbert demuestra es que un plano afín ordenado que satisface la versión afín del enunciado arguiano está embebido en un espacio afín ordenado. Por otra parte, la importancia que Hilbert confirió a la generalización de este teorema es manifiesta en Hilbert y Cohn-Vossen (1932).

## 5. Conclusiones

¿Adhirió Hilbert a un ideal de pureza del método? Resulta difícil responder esta pregunta sin atar el problema epistémico de la pureza del método; la dificultad radica en que Hilbert no parece ser del todo resolutivo sobre la cuestión, a pesar de la contundencia de alguna de sus afirmaciones, particularmente las recogidas hacia el final de la sección 2, así como la que encontramos en la *Schlusswort* de sus *Grundlagen der Geometrie*, recogida en la sección 3. Una manera de diagnosticar esta situación es sosteniendo que el estatus de las demandas de pureza tienen una “doble cara”: por un lado, estas --o algunas de ellas-- encuentran su legitimidad como una “demanda del pensamiento”; por otro lado, algunas de demandas debe atestiguar su fecundidad matemática para ser tomadas como legítimas. Esta fecundidad está íntimamente relacionada con la capacidad de los métodos de ser generalizados y empleados para la resolución de nuevos problemas. Así pues, la primera cara guarda relación con una manera de entender las teorías matemáticas, su autonomía y su unidad metodológica; este aspecto *general* encuentra cierta expresión en el proyecto axiomático de Hilbert para la geometría. Esta contribución a pretendido echar un poco de luz sobre la otra cara más pragmática, la cual guarda relación con las demandas puristas *particulares*.

A tales efectos, en la sección 2 he procurado ofrecer evidencia textual en favor de una “actitud pragmática” por parte de Hilbert respecto a principios metodológicos generales (o “metametodológicos”), pero la cuestión clave de esta contribución radica en la lectura propuesta en la sección 3 del pasaje clave en la *Schlusswort* del *Festschrift*. De acuerdo con esta, la investigación axiomática provee un panorama de resultados “objetivos” que permiten discriminar distintas demandas puristas particulares y su posible realización; sin embargo, la decisión sobre cuál alternativa ha de ser considerada para la construcción de la teoría no deja de estar sometida a un juicio sobre la fecundidad matemática de las mismas. En una analogía jurídica, diríamos que la legitimidad de demanda purista particular es evaluada por el matemático como un juez, apoyándose en el “testimonio” experto representado por los resultados de la investigación axiomática. De este modo, la sección 4 ilustra esta lectura con un caso célebre: el teorema de Desargues en el plano; el foco aquí no es tanto el resultado de independencia que echa por tierra la demanda purista proyectiva, sino lo que parece ser la deliberada decisión de Hilbert de priorizar una base axiomática *impura* por resultar más fecunda que una opción purista sí realizable, --i.e. una base axiomática del plano euclidiano.

## Bibliografía

- Arana, A., & Detlefsen, M. (2011). Purity of methods. *Philosophers' Imprint*, 11(2), 1–20.
- Arana, A., & Mancosu, P. (2012). On the relationship between plane and solid geometry. *The Review of Symbolic Logic*, 5(2), 294–353.
- Corry, L. (2006). Axiomatics, empiricism, and *Anschauung* in Hilbert's conception of geometry: Between arithmetic and general relativity. En J. Ferreirós & J. Gray (Eds.), *The architecture of modern mathematics* (pp. 133–156). Oxford University Press.
- Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg.
- Dirichlet, G. L. (1897). Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi. En L. Kronecker (Ed.), *G. Lejeune Dirichlet's Werke* (Band II, pp. 225–252). Druck und Verlag von Georg. (Obra original publicada en 1852)
- Ferreirós, J. (2009). Hilbert, logicism, and mathematical existence. *Synthese*, 170(1), 33–70.
- Ferreirós, J. (2023). Conceptual structuralism. *Journal for General Philosophy of Science*, 54(1), 125–148.
- Hallett, M. (1994). Hilbert's axiomatic method and the laws of thought. En A. George (Ed.), *Mathematics and mind* (pp. 158–200). Oxford University Press.
- Hallett, M. (2008). Reflections on the purity of method in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*. En P. Mancosu (Ed.), *The philosophy of mathematical practice* (pp. 198–255). Oxford University Press.
- Hallett, M. (2021). Frege and Hilbert on conceptual analysis and foundations: Some remarks. En F. Boccuni & A. Sereni (Eds.), *Origins and varieties of logicism* (pp. 169–196). Routledge.
- Hallett, M., & Majer, U. (Eds.). (2004). *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891–1902* (Vol. 1). Springer.
- Hilbert, D. (1891). Projektive Geometrie. En M. Hallett & U. Majer (Eds.), *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891–1902* (Vol. 1, pp. 21–55). Springer.
- Hilbert, D. (1894a). Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 3, 59.

- Hilbert, D. (1894b). Die Grundlagen der Geometrie. En M. Hallett & U. Majer (Eds.), *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891–1902* (Vol. 1, pp. 72–123). Springer.
- Hilbert, D. (1896a). Ein neuer Beweis des Kronecker'schen Fundamentalsatzes über abelsche Zahlkörper. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1896*, 29–39.
- Hilbert, D. (1896b). Feriencursus Ostern 1896. En M. Hallett & U. Majer (Eds.), *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891–1902* (Vol. 1, pp. 152–156). Springer.
- Hilbert, D. (1897). Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4.
- Hilbert, D. (1898/1899a). Elemente der Euklidischen Geometrie. En M. Hallett & U. Majer (Eds.), *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891–1902* (Vol. 1, pp. 302–394). Springer.
- Hilbert, D. (1898/1899b). Grundlagen der Euklidischen Geometrie. En M. Hallett & U. Majer (Eds.), *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891–1902* (Vol. 1, pp. 221–286). Springer.
- Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. En *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen* (pp. 425–525). Teubner.
- Hilbert, D. (1900a). Mathematische Probleme. En *Gesammelte Abhandlungen* (2.<sup>a</sup> ed., Vol. 3, pp. 290–329). Springer.
- Hilbert, D. (1900b). Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8, 180–184.

# Intuiciones e ingenios: Turing y el razonamiento matemático

Javier Legris

Centro de Investigación en Epistemología de las Ciencias Económicas (CIECE).  
Instituto Interdisciplinario de Economía Política IIEP (UBA-CONICET).

Mariana Olezza

Centro de Investigación en Epistemología de las Ciencias Económicas (CIECE).  
Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires (FCE) UBA.

## Resumen

En su tesis doctoral, Alan Turing distinguió dos “facultades” en el razonamiento matemático a las que llamó *intuición* e *ingenio*. En este trabajo analizaremos, en primer lugar, la caracterización que Turing hizo de ambas y nos propondremos situarlas en el marco de su concepción de los métodos computables. En segundo lugar, ubicaremos la distinción en el contexto de los intentos de la época por superar los resultados negativos contenidos en los teoremas de incompletitud de Gödel. Finalmente, señalaremos algunas semejanzas que estas ideas exhiben con otras concepciones de la época, en particular con la distinción entre razonamiento corolario y razonamiento teorematizado debida a Charles S. Peirce, y las confrontaremos con la posterior caracterización del concepto de inteligencia debida al mismo Turing. Como consecuencia, esperamos destacar el importante papel que tuvieron la lógica formal y la metamatemática en la concepción de la inteligencia que Turing fue desarrollando en su obra.

**Palabras clave** | Gödel; Turing; Peirce; mentes; máquinas

## 1. Introducción

Como consecuencia de su célebre teorema de Incompletitud publicado en 1931, Kurt Gödel (1906-1978) dejó en claro que era imposible demostrar la consistencia de la aritmética empleando los procedimientos *finitos* del llamado “programa de Hilbert”. Hacia 1917, David Hilbert (1862–1943) había propuesto un programa para demostrar que los principios de la matemática clásica eran consistentes por medio de métodos que él consideraba totalmente seguros e indubitables (métodos “finitos”), y puso a trabajar en el programa a miembros de su equipo de investigación en Göttingen. A la sistematización de estos métodos Hilbert dio el nombre de “metamatemática”. El “punto de vista finito” (*finite Einstellung*) adoptado no tenía en ese momento una caracterización precisa. Hilbert ensayó elucidaciones tanto gnoseológicas como ontológicas, y algo semejante puede decirse de su estrecho colaborador Paul Bernays (1888-1977)<sup>1</sup>. Estas aclaraciones generaron discusiones metodológicas y filosóficas, que conservaron su vigencia con posterioridad a los teoremas de Gödel (algo añadiremos más adelante, en la sección 3, sobre este punto). Importa señalar aquí que este “punto de vista finito” abarcaba lo que entendemos en la actualidad por métodos algorítmicos, recursivos y de decisión, y que involucra la manipulación de signos, entendidos como entidades concretas que se captan por la percepción, excluyendo todo método que supusiera totalidades infinitas. En todo caso, el programa implicó avances fundamentales y de largo alcance para la naciente lógica simbólica.

Ahora bien, el primer teorema de incompletitud de Gödel establecía que, dado cualquier sistema matemático *formalizado* (en el sentido de emplear únicamente procedimientos *finitos*) que sea consistente y lo suficientemente expresivo como para describir la aritmética básica, existen afirmaciones aritméticas verdaderas que no pueden ser demostradas dentro de ese sistema. Por lo tanto, ningún sistema *formalizado* para la aritmética puede ser completo. Un segundo teorema de incompletitud, que puede verse como un corolario del primero establece que ningún sistema formal consistente puede demostrar su propia consistencia. En otras palabras, si uno tiene un sistema matemático y cree que es consistente, no puede utilizar las reglas del mismo sistema para demostrar su consistencia (para una aproximación más detallada, puede verse, *inter alia*, Franzén, 2005, pp.28-46).

Entre las reacciones provocadas por estos resultados se encuentran varios proyectos de *extender* el punto de vista finito con recursos matemáticos de demostración más poderosos, pero que a la vez resultaran aceptables y seguros.

---

<sup>1</sup> Para una primera aproximación a este tema, véase la sección 2 de Zach 2023.

Parte de estas investigaciones condujo a la conformación de la *teoría de la demostración* como una disciplina dentro de la lógica matemática. Entre estos proyectos se encuentra la tesis doctoral que Alan Turing (1912-1954) escribió en 1938 en Princeton bajo la dirección de Alonzo Church (1903-1995). Turing llamó “lógica de ordinales” (*ordinal logic*) a la metodología que utilizó para acometer la demostración.

## 2. El doctorado en Princeton

De acuerdo con la biografía de Andrew Hodges, en la primavera de 1935 Turing asistió en Cambridge a un curso sobre Fundamentos de Matemática, dictado por el matemático Max Newman (1897-1984). El curso estaba centrado en el Programa de Hilbert y sus consecuencias, en especial los teoremas de incompletitud de Gödel (véase Hodges 2012 p. 83). En el curso, la metamatemática de Hilbert era entendida principalmente como el estudio de teorías axiomatizadas por medio de funciones matemáticas recursivas. Turing se interesó en particular en el *Entscheidungsproblem* (el “problema de la decisión”) tal como era caracterizado en los *Grundzüge der Theoretischen Logik* de Hilbert & Ackermann (Hilbert & Ackermann 1928 pp. 72 ss.) Este problema, formulado de un modo general, equivalía a preguntarse si existía en matemática un método *bien definido* (o sea un método cuyos procedimientos están enteramente especificados) que, aplicado a cualquier enunciado matemático, pudiera decidir si ese enunciado era verdadero o no.<sup>2</sup> Este interés lo condujo a definir el concepto de función computable recurriendo a una “máquina ideal”, que actualmente lleva su nombre, lo que plasmó en su célebre y fundacional artículo de 1936. En efecto, toda aplicación de un método de decisión semejante debía tener un número finito de pasos, siguiendo reglas definidas de manera precisa. Sería entonces un método “mecánico”, lo que para Turing significaba que era un método ejecutable “por una máquina” (véase Newman 1955, p. 256). La conexión con los métodos finitos del programa de Hilbert es evidente: El *Entscheidungsproblem* surgido en el programa de Hilbert resultó ser el disparador que llevó a Turing a la concepción de los métodos finitos como métodos que pueden ser llevados a cabo por una máquina.

Entre 1936 y 1938 Turing permaneció en Princeton trabajando con Alonzo Church, sin duda uno de los mayores expertos en lógica matemática de ese período. En un primer momento, Turing se abocó a la equivalencia entre el concepto de  $\lambda$ -computabilidad de Church y su propio concepto de computabilidad en términos de una máquina (equivalencia que en adelante se conocería como la *tesis de Church-Turing*). Al año siguiente, gracias al

---

2 En un sentido específico, el problema de la decisión se aplicaba a fórmulas bien formadas del sistema formalizado de la lógica de predicados de primer orden.

otorgamiento de una beca, Turing decidió llevar a cabo su tesis doctoral en Princeton bajo la dirección de Church, que debía consistir en demostrar la posibilidad de un sistema formalizado *completo* para la aritmética mediante una *extensión* del “punto de vista finito” del programa de Hilbert y, de este modo, superar el problema de la incompletitud de Gödel. El texto de la tesis apareció, con alteraciones menores, al año siguiente bajo la forma de artículo: “Systems of Logic Based on Ordinals” (Sistemas de lógica basados en ordinales, Turing 1939). El término “lógica” no tiene el sentido usual e histórico de sistemas de reglas para el razonamiento correcto sino de sistemas *formalizados*, esto es, sistemas constituidos por la especificación *efectiva* de un lenguaje y un conjunto de axiomas y reglas de inferencia, siguiendo “el punto de vista finito”. Así, el término “lógica” es usado para referirse, de un modo aproximado, a la *metamatemática* de Hilbert, que tomaba métodos y resultados de la lógica simbólica desarrollada hasta ese momento. Esta acepción ha pasado a ser de uso común en matemáticas y ciencias de la computación.

La solución que Turing ideó para una demostración de completitud consistía básicamente en ir construyendo una *progresión de extensiones* a partir de la aritmética formalizada y mostrar la *consistencia* de cada extensión sucesiva. Al comienzo del artículo, se presenta esta idea:

"El conocido teorema de Gödel (1931) muestra que todo sistema lógico es incompleto en cierto sentido, pero al mismo tiempo indica medios con los cuales, a partir de un sistema  $L$  de lógica, se puede obtener un sistema más completo  $L'$ . Repitiendo el proceso obtenemos una secuencia  $L, L_1 = L', L_2 = L_1' \dots$  cada uno más completo que el anterior. Luego se puede construir una lógica  $L_\omega$  en la que los teoremas demostrables son la totalidad de los teoremas demostrables con la ayuda de las lógicas  $L, L_1, L_2, \dots$ . Procediendo de esta manera, podemos asociar un sistema de lógica con cualquier ordinal constructivo. Se puede preguntar si tal secuencia de lógicas de este tipo es completa en el sentido de que a cualquier problema  $A$  le corresponde un ordinal  $\alpha$  tal que  $A$  es resoluble mediante la lógica  $L_\alpha$ " (Turing, 1939, pp.161 s.).

Con más precisión, dado el teorema de incompletitud de Gödel, para *cada* sistema  $L$  de la secuencia, existe un enunciado verdadero  $S_L$  que no es demostrable en  $L$ . Este enunciado es agregado a  $L$ , de modo que se obtiene en cada caso un nuevo sistema  $L'$ . Turing llama “lógica  $L_\omega$ ” a la *unión* de todos los sistemas  $L_i$ , que se puede caracterizar como la unión de todos los conjuntos de axiomas de cada sistema, ya que las reglas de inferencias son las mismas para todos los sistemas sucesivos. Ahora bien, la serie de sistemas  $L_i$  resulta de la iteración de un procedimiento que es *efectivo* en cada caso, y la iteración puede continuarse a los casos  $L_{\omega+1}$ , etc., y así hasta llegar a ordinales transfinitos. Sin

embargo, la manera de ir generando las sucesivas extensiones no era finita.<sup>3</sup> La descripción del proceso lleva a la conjetura de que la *totalidad infinita* de los sistemas es completo.

El trabajo de Turing es prácticamente contemporáneo a la demostración de consistencia de la aritmética obtenida por Gerhard Gentzen (1909-1945) y los métodos empleados en ambos casos presentan algunas semejanzas superficiales<sup>4</sup>. No obstante, el marco conceptual es muy distinto en cada caso. Gentzen aspiraba a una extensión del programa de Hilbert introduciendo métodos “constructivos”, semejantes a los que eran aceptados en el intuicionismo matemático (Gentzen 1936). La estrategia consistía en este caso en adoptar una inducción transfinita limitada que, argumentaba Gentzen, era aceptable desde un punto de vista constructivo. Esta era la inducción transfinita hasta el ordinal ordinal  $\varepsilon_0$  que es un ordinal transfinito aunque numerable (tal como lo es  $\omega$ , el menor ordinal transfinito, correspondiente a los números naturales). El hecho de que  $\varepsilon_0$  es numerable hace posible la asignación de un número natural a todo ordinal menor que  $\varepsilon_0$ . Así la consistencia de la aritmética de Peano era demostrada mediante un método de razonamiento que se basa en la “segunda clase de números ordinales” de Cantor. Para Gentzen, este método satisfacía las condiciones de “constructividad” (si bien no era finito).

Con la introducción de ordinales transfinitos, Gentzen iniciaba una línea de investigación en la teoría de la demostración, afín a la metodología de Turing. No obstante, la idea que Turing adoptaba en su demostración de completitud tenía una base diferente a la que guiaba a Gentzen en su demostración de consistencia.<sup>5</sup> Para tener una idea aproximada, recordemos que los sistemas  $L_i$  se generaban recursivamente y que la iteración avanzaba recursivamente hasta llegar al transfinito (si bien cada paso era finito). Dicho de otro modo, se trataba de una serie infinita de inducciones finitas y no una inducción transfinita.

---

**3** Turing tomaba aquí resultados previos de Church (con la colaboración de S. C. Kleene) acerca de una notación para ordinales constructivos y empleó la notación del cálculo lambda. Solomon Feferman señala que a fin de que el procedimiento sea efectivo no se toman los ordinales mismos, sino notaciones para ordinales (Appel 2012, p. 20).

**4** En la sección 12 de la tesis doctoral, Turing menciona los resultados de Gentzen.

**5** De todos modos, Turing considera la inducción hasta  $\varepsilon_0$  como una de las maneras para construir los sistemas ordinales.

### 3. Intuiciones e ingenios

En el trabajo surgen nuevas ideas y problemas, cuya exposición va más allá de nuestros objetivos<sup>6</sup>. Aquí nos queremos concentrar en una serie de observaciones que aparecen hacia el final del artículo, en la sección 11. En ellas Turing extrapola los procedimientos empleados en su demostración de completitud al *razonamiento matemático* en general, entendido como los procesos de obtención de conocimiento matemático (extrapolación que no era ajena al espíritu de la época e incluso estaba presente en el programa de Hilbert). Turing comienza del modo siguiente:

"El razonamiento matemático puede considerarse, bastante esquemáticamente, como el ejercicio de una combinación de dos facultades, a las que llamaremos *intuición* (*intuition*) e *ingenio* (*ingenuity*). La actividad de la intuición consiste en hacer juicios espontáneos que no son el resultado de corrientes conscientes de razonamiento. Estos juicios son a menudo, pero no invariablemente, correctos (dejando de lado la cuestión de lo que se entiende por 'correcto'). [...] El ejercicio del ingenio en matemáticas consiste en ayudar a la intuición mediante disposiciones adecuadas de proposiciones, y quizás figuras geométricas o dibujos. Se pretende que cuando estos estén realmente bien dispuestos, la validez de los pasos intuitivos requeridos no puede ponerse seriamente en duda" (Turing 1939, pp. 214 s.).

Turing estaba interesado en la *cognición* matemática. Siguiendo ideas tradicionales sobre el conocimiento Turing vincula la intuición con afirmaciones espontáneas, sin que medie un proceso inferencial. El ingenio explicita y organiza las intuiciones de modo que se pueda juzgar la corrección del conocimiento obtenido, aunque aceptando que las intuiciones no conducen a resultados irrefutables. A continuación, se explicita la función de la "lógica formal" (que de algún modo equipara con el ingenio, pues supondría reglas en un sentido finito):

"Las partes desempeñadas por estas dos facultades difieren, por supuesto, de una ocasión a otra y de un matemático a otro. Esta arbitrariedad puede eliminarse mediante la introducción de una lógica formal. La necesidad de utilizar la intuición se reduce entonces en gran medida al establecer reglas formales para llevar a cabo inferencias que siempre son intuitivamente válidas.

---

<sup>6</sup> Por ejemplo, en 1962, Feferman mostró que la progresión de enunciados de consistencia no es completa respecto de los enunciados de la forma  $\forall\exists$ . (véase también Appel 2012, p. 22). Más importante es que Turing introdujo aquí la noción de cómputo relativo a un oráculo ("a kind of oracle as it were", Turing 1939, p.172), noción que cobraría importancia posteriormente.

En el trabajo con una lógica formal, la idea de ingenio toma una forma más definida. En general, se formulará una lógica formal de manera que admita una considerable variedad de posibles pasos en cualquier etapa de una demostración. El ingenio determinará entonces qué pasos son más rentables para demostrar una proposición específica” (Turing 1939, p. 215).

Turing parece sugerir aquí que en la práctica matemática la distinción no puede hacerse de una manera nítida, sino que primero se requiere caracterizar rigurosamente el ingenio mediante la “lógica formal”, es decir, la formalización en el sentido del programa de Hilbert, lo que queda confirmado en el párrafo siguiente:

“En tiempos previos a Gödel, se pensaba que sería posible llevar este programa a tal punto que todas las valoraciones intuitivas de las matemáticas podrían ser reemplazadas por un número finito de estas reglas. La necesidad de la intuición sería entonces completamente eliminada” (*loc. cit.*).

La idea de Turing era analizar cuál es el límite del ingenio sin que la intuición sea indispensable: “Hemos estado tratando de ver hasta qué punto es posible eliminar la intuición y dejar solo el ingenio” (Turing, 1939, pp. 214–215).

Ahora bien, Turing aspiraba a continuar el mismo espíritu del programa de Hilbert, buscando en la “intuición” extensiones de los procedimientos finitos (i. e., “ingenios”) mediante los cuales demostrar la consistencia de la aritmética. La (indispensable) intuición consistiría en la idea de que en el infinito las sucesivas extensiones ordenadas son en su totalidad consistentes. Así el resultado de Turing se ubica dentro de las formas de la “nueva metamatemática”<sup>7</sup>.

#### **4. La distinción entre intuición e ingenio en su contexto**

La distinción entre intuición e ingenio tiene interés más allá de la demostración de consistencia desarrollada por Turing y es difícil resistir la tentación de aplicarla a la matemática en su totalidad, en particular, a la naturaleza del conocimiento matemático.

Mediante el concepto de intuición, Turing caracterizó la obtención de afirmaciones que no surgen de un proceso mecanizable, sin dar más especificaciones que la vaga noción de espontaneidad. Simplemente, la intuición no puede reducirse a un algoritmo. Ahora bien, el concepto de

---

<sup>7</sup> “Neue meta-mathematische Standpunkt” expresión usada por Wilhelm Ackermann (1896-1962) para referirse a los desarrollos posteriores al teorema de Gödel que formarían el núcleo de la actual teoría de la demostración, véase Kahle 2017, p. 6)

intuición es polisémico en la historia de la ciencia y la filosofía, recibiendo diferentes interpretaciones en la filosofía de la matemática contemporánea al trabajo de Turing. A modo de ejemplo, poco más de una década antes, Hilbert recurrió a una noción más sofisticada de intuición (*Anschauung* en alemán) con el fin de justificar los procesos finitos de la metamatemática: la aplicación de los procesos lógicos finitos presupone la representación [*Vorstellung*] de objetos concretos (signos en definitiva) en una intuición previa a todo “pensamiento” (véase Hilbert 1922, pp. 162 s.). Más tarde Paul Bernays se refería a la captación por intuición de objetos discretos y de sucesión de objetos como base para procesos combinatorios (Bernays 1930, p. 108).

Así, a la intuición se le asigna en este caso la función contraria: proporciona el conocimiento de las entidades indispensables para el punto de vista finito. Se trasluce aquí la tendencia a adoptar una perspectiva trascendental, influida por las diferentes formas de kantismo existentes en el contexto de ese momento con un acento en cuestiones ontológicas, esto es, en la naturaleza de los objetos matemáticos (véase Legris 2005). Por el contrario, Turing formulaba sus ideas con un punto de partida distinto, donde se apreciaban tendencias claramente naturalistas, focalizándose en los *procesos cognitivos* en la matemática, independientemente de cuestiones ontológicas. En el caso del ingenio estos procesos equivaldrían a procedimientos ejecutables en una máquina.

La distinción puede ser interpretada de diferentes maneras. Por ejemplo, Jack Copeland recurrió a casos de deducciones en *la lógica de primer orden* para mostrar que la idea de ingenio tiene matices según la estructura de las demostraciones (Copeland, p. 135 s.). Si es necesario emplear únicamente las reglas de la lógica de primer orden en una demostración, tendremos a lo sumo diferentes grados de ingenio, pero no auténtica intuición. En última instancia, en la lógica de primer orden es siempre viable desarrollar, en principio, un método finito o algorítmico para obtener una demostración correcta de un teorema a partir de un número finito de axiomas (y sin considerar limitaciones “materiales”). Dicho de otro modo, una vez que el ingenio consigue el objetivo de desarrollar un método, lo demás es meramente automático. La idea de reconstruir esta noción de ingenio como aplicaciones de la lógica de primer orden parece práctica, pero puede llevar a confusiones. Por ejemplo, el “razonamiento finito” no coincide con ella, y además debe determinarse si se trata de la lógica *clásica* de primer orden o de una lógica más débil (v. g. la intuicionista).

El sesgo cognitivo de la distinción hecha por Turing la conecta con otra distinción señalada en los albores del siglo XX por Charles S. Peirce (1839-1914) y que ocupa un lugar destacado en la filosofía de la matemática actual. Se trata de la distinción entre *razonamiento teorematizado* y *razonamiento corolario*. Peirce

la aplica en su concepción de las demostraciones matemáticas<sup>8</sup>. Para Peirce la deducción consistía en construir diagramas correspondientes a las premisas, entendidas como situaciones hipotéticas, para luego manipularlos, experimentando con ellos a fin de obtener la conclusión (CP 3.363)<sup>9</sup>. Así pues, las hipótesis desempeñan un papel fundamental en la deducción y complementan su aspecto diagramático. Una hipótesis es “una proposición que es imaginada en sentido estricto como verdadera de un estado de cosas ideal” (CP 3.558). Una demostración corolarial “representa las condiciones de la conclusión en un diagrama y a partir de la observación de este diagrama encuentra, así como está, la verdad de la conclusión” (CP 2.267). En cambio, una demostración teorematizada “recurre a procesos más complicados de pensamiento” (EP II, 442). Estos “procesos más complicados” implican el añadido de información que no está presente en las premisas de la demostración y es por ellos que en matemática se habla de “invención” y de “avance” del conocimiento plasmado en *nuevos* teoremas (véase Peirce NEM IV, 49). Con esta distinción Peirce abrió la caja de Pandora del conocimiento matemático. Los procedimientos que conducen al agregado de nueva información en las demostraciones reciben diferentes caracterizaciones. Un punto central es la ejecución de un “ingenioso experimento” (*ingenious experiment*) sobre los diagramas (en sentido peirceano) que constituyen los elementos de la demostración y a partir del experimento *se deduce*, finalmente, la conclusión (véase Peirce CP 2.267). El “experimento” pone en acción la “nueva idea” o hipótesis. En cuanto a lo esencial del razonamiento teorematizado, Peirce no es mucho más claro que esto. Los ejemplos de la práctica matemática que utiliza dan lugar a diferentes interpretaciones<sup>10</sup>.

#### 4. “Inteligencia mecánica” y razonamiento matemático

Tan pronto como la distinción entre ingenio e intuición se examina en el contexto de la concepción de la inteligencia que en años posteriores fue desarrollando Turing, se tiene la impresión de un cambio de posición. En 1950, Turing publicó en la revista *Mind* su célebre artículo “*Computer Machinery and Intelligence*”, donde, entre otras cosas, introdujo el “juego de imitación”, que ahora se conoce como el “test” que lleva su nombre, a la manera de un criterio para considerar que una

---

<sup>8</sup> Los términos están tomados de la tradición de la geometría de Euclides. Peirce introdujo la distinción en varios manuscritos no publicados en vida. Una de las presentaciones más claras se encuentra en un texto de 1902 (véase Peirce NEM IV, pp. 36 y ss.).

<sup>9</sup> Sobre la naturaleza esencialmente diagramática de la demostración en el pensamiento de Peirce puede verse Legris 2012.

<sup>10</sup> Uno de los ejemplos más interesantes es el teorema de Desargues para la geometría plana, véase Giovannini & Legris 2025.

máquina exhibe inteligencia, esto es, para responder a la pregunta con que comienza el artículo: “¿Pueden las máquinas pensar?” (donde “pensar” equivale, con cierta desprolijidad, a “ser inteligente”). La hipótesis subyacente a este criterio es que la inteligencia (que incluye lo que llamamos razonamiento) en general se reduce a procedimientos “mecánicos”, es decir que pueden ser llevados a cabo por una máquina. Para Turing, en realidad, el *límite* entre ambos procesos de conocimiento (mecánicos y no mecánicos) no es nítido, dependiendo de la situación concreta en que se aplican.

Frente a una respuesta afirmativa a la pregunta acerca de la capacidad intelectual de las máquinas, Turing presenta una serie de posibles objeciones con la intención de refutarlas, haciendo más viable su posición. La tercera de estas objeciones es la “objeción matemática” (Turing 1950, p. 444), la cual parte de los teoremas de limitación de los sistemas formales, con el teorema de Gödel en primer lugar. A partir de la versión de Turing del resultado de incompletitud en términos de una máquina (Turing 1937), la objeción consistiría en la demostración de “una incapacidad de las máquinas a la cual no está sujeto el intelecto humano” (Turing 1950, p. 445). Curiosamente, la idea de completitud debida a Turing, a la que nos hemos referido antes, sería un ejemplo de esta objeción: La “lógica de ordinales” sería un producto del intelecto humano, que estaría más allá de la capacidad de las máquinas. Turing no hace referencia a su propia demostración, pero esboza muy brevemente una respuesta a esta objeción que está vinculada con los procedimientos empleados en ella y que lleva a reinterpretar la distinción entre intuición e ingenio.

En su comentario, Turing señalaba que la “superioridad” de la inteligencia humana respecto de la inteligencia “mecánica” se supone en relación con una máquina. Sin embargo, “no es la cuestión de triunfar simultáneamente sobre *todas* las máquinas” (Turing 1950, p. 445). Como ya se mencionó, la estrategia de Turing incluía la construcción de sucesivos sistemas finitos consistentes, cada vez más potentes, en los que sucesivamente se iban demostrando más teoremas. La pretensión era que la secuencia entera de estos sistemas sería *completa*. En el caso de *máquinas* puede pensarse en una secuencia análoga. Ciertamente, ambas secuencias, de sistemas o máquinas, serían ambas infinitas, pero cabe *conjeturar* que el todo sería completo y consistente. Es aquí donde entraba decididamente la idea de intuición, pero sobre la base de sistemas contruidos con *ingenio*. En su trabajo de 1950, Turing no hace referencia a su demostración, pero la conexión resulta razonable. En trabajos anteriores y en su correspondencia con Newman, Turing desliza afirmaciones que apuntalan esta conexión.

La sexta objeción tiene cierta continuidad con la cuarta, pues afirma la imposibilidad de creatividad en las máquinas. Esta es la llamada “objeción Lovelace”, manifestada mucho antes de Alan Turing, por la célebre

matemática Augusta Ada King, Countess of Lovelace (1815-1852). Ella afirmó: “La Máquina Analítica no tiene pretensiones de originar nada. Puede hacer solo lo que sepamos ordenarle cómo ejecutar.”<sup>11</sup> (Lovelace 1842, p.722). Turing responde que en su época no había suficiente evidencia disponible para que creer en la creatividad de las máquinas, y propone reformular la objeción en los siguientes términos: “una máquina nunca hace nada realmente nuevo” (Turing 1950, p. 450).

El artículo de 1950 de Turing está considerado un trabajo seminal en inteligencia artificial y tuvo una inmensa repercusión posterior, siendo reimpresso en varias compilaciones y recibiendo un sinnúmero de citas. Desde ya, muchas de las afirmaciones contenidas en él son hipotéticas, programáticas y no están exentas de una cierta ambigüedad.<sup>12</sup> En todo caso, añaden complejidad a sus ideas previas sobre el razonamiento, alimentando la discusión posterior. Más adelante en el artículo, una vez concluido el análisis de las objeciones, Turing hace una analogía entre las funciones de la inteligencia con las capas de una cebolla:

“Al considerar las funciones de la mente o el cerebro, encontramos ciertas operaciones que se pueden explicar en términos puramente mecánicos. Decimos que esto no corresponde a la mente real: es un cierto tipo de capa que debemos sacar si queremos encontrar la mente real. Pero luego, en lo que queda, encontramos otra capa que se puede remover, y así sucesivamente. Si se procede de esta manera, ¿podemos alcanzar en algún momento la mente real, o eventualmente llegamos a una capa que no contiene nada? En este último caso, toda la mente sería mecánica” (Turing 1950, pp. 454).

Con esta analogía, Turing deja abierta la posibilidad de que, a final de cuentas, todas las operaciones intelectuales (“de la mente o el cerebro”) sean *mecánicas*, de modo que no haya operaciones que no sean computables; lo que hay son “capas” de operaciones que, a lo sumo, se organizan de un modo complejo. Si volvemos al caso más específico del razonamiento matemático, la “intuición” no es otra cosa que el “ingenio” con una complejidad mayor. Sin embargo, queda la posibilidad de que, en realidad, los procedimientos del ingenio que encierra la intuición no sean finitos: “No nos importa cuánto ingenio se requiera, y, por lo tanto, asumimos que *está disponible en cantidad ilimitada*” (Turing, 1939, pp. 214–215) [la cursiva es nuestra].

Gualterio Picinnini destacó esta importancia del aprendizaje: en algún momento sería posible programar una computadora para que ésta pudiese

---

11 Se trata de la “máquina analítica” de Charles Babbage.

12 Como es sabido, la aparición de la inteligencia artificial basada en los LLM ha llevado a cuestionar el test de Turing.

descubrir nuevas reglas, superando limitaciones como la incompletitud e indecidibilidad, de la misma manera que los humanos matemáticos suelen hacer (véase Piccinini, 2003, p. 39).

## 5. Algunas conclusiones

El recorrido que se acaba de hacer a través de los trabajos de Turing de 1938 y 1950 nos muestra que sus reflexiones sobre la naturaleza del razonamiento matemático están guiadas por su renuencia a admitir procesos de razonamiento no computables. La distinción entre *intuición* e *ingenio* como dos modos de conocimiento, sin ser enteramente original, sirve para discutir el conocimiento matemático desde la perspectiva de los procedimientos computables y se enriquece al conectarla con la distinción entre razonamiento corolario y teorematológico debida a Peirce.

El razonamiento teorematológico requiere, muy especialmente, la introducción de hipótesis, resultante de la aplicación de procedimientos que caen bajo lo que Peirce denominaba abducción, que tiene para Peirce un aspecto *creativo*.

Dos años antes del artículo de *Mind*, Turing había introducido el tema del *aprendizaje* en conexión con la idea de máquinas inteligentes. La inteligencia de la máquina debía resultar de un proceso análogo a la “educación”, que se basa en la interacción con un contexto, que en el caso de los seres humanos llamamos “social” (Turing 1948, p. 422). Unas páginas más adelante, Turing distingue dos capacidades a obtener por medio de aprendizaje, a las que llama *disciplina* e *iniciativa* (Turing 1948, p. 422), siendo esta última la que lleva a la creatividad. No es difícil conjeturar que esta nueva distinción es un refinamiento de la formulada una década antes entre ingenio e intuición. Esta explicitación de procesos de aprendizaje en la constitución de la inteligencia le permitirá a Turing avanzar hacia una inteligencia artificial.<sup>13</sup>

Es interesante señalar que fue Peirce quien, antes que Turing y Gödel, ya consideraba que los razonamientos corolarios podían ser realizados mediante una máquina, mientras que el razonamiento teorematológico (relacionado con la imaginación y el razonamiento hipotético) iba más allá de las capacidades de una máquina. Turing comparte con Peirce el hecho de analizar el razonamiento como un proceso cognitivo, punto de vista que no estaba debidamente desarrollado en sus respectivas épocas. Lo que Turing concluyó en 1938 al construir su sistema lógico basado en ordinales, cada vez

---

<sup>13</sup> Es importante observar que en este trabajo de 1948 Turing introduce el concepto de red neuronal, que abrirá posteriormente una provechosa línea de investigación en inteligencia artificial.

más complejo, es que, a pesar de aumentar la complejidad, el problema de la necesidad de intuiciones externas se reducía, pero no se eliminaba totalmente. En 1950 Turing creía que, si una máquina podía cambiar sus instrucciones de manera autónoma, sin seguir un método predefinido, entonces no veía razón por la cual no podría alcanzar e incluso superar la inteligencia de los humanos. Se puede decir que Turing aspiraba a concebir máquinas equipadas con el razonamiento teorematóico.

## Bibliografía

- Appel, A. W. (Ed.). (2012). *Alan Turing's systems of logic: The Princeton thesis*. Princeton University Press.
- Bernays, P. (1930). Die Grundgedanken der Fries'schen Philosophie in ihrem Verhältnis zum heutigen Stand der Wissenschaft. *Abhandlungen der Fries'schen Schule. Neue Folge*, 5, 99–113.
- Copeland, B. J. (2024). The Church-Turing thesis. En E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2024 ed.). <https://plato.stanford.edu/archives/win2024/entries/church-turing/>
- Feferman, S. (1962). Transfinite recursive progressions of axiomatic theories. *The Journal of Symbolic Logic*, 27, 259–316.
- Feferman, S. (1988). Turing in the land of  $O(z)$ . En R. Herken (Ed.), *The universal Turing machine: A half-century survey* (pp. 122–123). Oxford University Press.
- Franzén, T. (2005). *Gödel's theorem: An incomplete guide to its use and abuse*. A K Peters.
- Gentzen, G. (1936). Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 112, 493–565.
- Giovannini, E. N., & Legris, J. (2025). Theorematic reasoning and purity of proofs. En A. Reichenberger et al. (Eds.), *Rethinking the history of logic, mathematics and exact sciences* (pp. 135–158). College Publications. <https://www.collegepublications.co.uk/tributes/?00053>
- Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1), 173–198.
- Hilbert, D. (1922). Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität*, 1, 157–177.
- Hilbert, D. (1930). Probleme der Grundlegung der Mathematik. *Mathematische Annalen*, 102, 1–9.

- Hilbert, D., & Ackermann, W. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer.
- Hodges, A. (2012). *Alan Turing: The enigma* (Centenary ed.). Princeton University Press.
- Kahle, R. (2015). Gentzen's consistency proof in context. En R. Kahle & M. Rathjen (Eds.), *Gentzen's centenary: The quest for consistency*. Springer.
- Peirce, C. S. (1934–1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (C. Hartshorne, P. Weiss, & A. W. Burks, Eds.). Harvard University Press.
- Peirce, C. S. (1976). *The new elements of mathematics* (C. Eisele, Ed., 4 vols.). Mouton.
- Piccinini, G. (2003). Alan Turing and the mathematical objection. *Minds and Machines*, 13(1), 23–48.
- Turing, A. M. (1948/2004). Intelligent machinery. En B. J. Copeland (Ed.), *The essential Turing*. Oxford University Press.
- Turing, A. M. (1936). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42(1), 230–265.
- Turing, A. M. (1939). Systems of logic based on ordinals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 45(1), 161–228.

# SEGUNDA PARTE

Disputas, conocimiento,  
y... ¡acción!

# Cambio de tema y elucidación en lógica

Omar Vásquez Dávila

Universidad Nacional de General Sarmiento

[hildebrando2@hotmail.com](mailto:hildebrando2@hotmail.com)

## Introducción

Mi objetivo principal en este trabajo es mostrar que la elucidación conceptual (*explication*), entendida apropiadamente, sirve para dar respuesta a un aspecto relevante del desafío lanzado por Quine (1986, Cap. 7) resumido en el eslogan “cambio de lógica, cambio de tema”. Como tal, este es un trabajo del área de la filosofía de la lógica. Sin embargo, dadas las características de dicho desafío, las ideas aquí propuestas pueden extenderse a otras áreas siempre y cuando el objetivo sea legitimar la comparación epistémica entre teorías en disputa.

El desafío de Quine ha sido ampliamente discutido en la bibliografía sobre el tema, por lo cual sólo haré aquí una reconstrucción somera del mismo. Básicamente, este autor sostiene que se produce una especie de inconmensurabilidad semántica cuando una persona propone una lógica divergente o rival a la Lógica Clásica de Primer Orden. Esto lo justifica afirmando que, al cambiar de lógica, se cambia el significado de conceptos lógicos tales como el de negación, disyunción, etc. A su vez, tal afirmación se basa en la idea de que dichas nociones lógicas reciben su significado únicamente de las reglas o leyes que rigen su uso. La conclusión que se sigue de esto es que no es posible un desacuerdo genuino entre personas que defienden sistemas lógicos rivales entre sí. En general, puede decirse que no hay una base común que posibilite el desacuerdo.<sup>1</sup> Aplicando esto a otras áreas, podríamos decir que siempre que se produce un cambio en algún nodo de un sistema conceptual cualquiera, no necesariamente científico, se imposibilita el desacuerdo entre quien propone el cambio y quien defiende el *statu quo* teórico. No obstante, este problema podría verse como más apremiante en el campo de la lógica, dadas ciertas concepciones que se tienen de esta disciplina, que la

---

<sup>1</sup> Para distintas interpretaciones y respuestas al desafío quineano véase Golan 2019, Haack 1978, Hjortland 2013.

entienden como presente e indispensable en todo tipo de teoría y discurso, independientemente del tópico.<sup>2</sup>

Ahora bien, el desafío quineano ha recibido muchas respuestas. Según mi punto de vista, las mismas se agrupan básicamente en dos tendencias. Por un lado, están quienes creen que es posible, y necesario para un desacuerdo genuino en lógica, mostrar que hay una base común que posibilite el desacuerdo entre sistemas lógicos rivales y, por otro lado, quienes creen que el desacuerdo en lógica *es* genuino aunque *no* exista una base común entre sistemas lógicos en disputa. Este segundo grupo entiende las disputas lógicas como metalingüísticas, disputas sobre cuál debería ser la caracterización *apropiada* de la terminología lógica. De hecho, en sus versiones más extremas, se entienden las disputas en lógica como meramente terminológicas. Desde esta perspectiva se dice que los términos lógicos son usados metalingüísticamente, pues lo que se busca es comunicar algo sobre el uso correcto de ese término.<sup>3</sup> La idea es que las disputas lógicas pueden ser disputas sustantivas incluso si las partes aceptan que están usando los términos de manera distinta: en las disputas lógicas se usan los términos lógicos metalingüísticamente para hacer una afirmación sobre la correcta extensión del término. Basado en una versión de la *explication* carnapiana, ofrezco en este trabajo algunas razones en contra de esta segunda tendencia, la meta lingüista, y ubico mi propuesta en el primer grupo, i.e., entre quienes sostienen que es necesario explicitar una base común que posibilite el desacuerdo genuino entre quienes adscriben a lógicas rivales.

Sin embargo, propongo una manera alternativa de dar cuenta de la mencionada *base común* que debe existir entre distintos sistemas lógicos. La misma se basa en los resultados de recaptura propuestos por Rosenblat (2020, 2021). A grandes rasgos, la idea de este autor es que al optar por una lógica divergente no-clásica (e.g., alguna lógica paraconsistente o paracompleta) sigue siendo posible recapturar, o seguir usando, los principios de la lógica clásica en contextos seguros. Rosenblat muestra de manera técnica cómo pueden identificarse los contextos (in)seguros, algo que no está presente en propuestas

---

**2** Es importante prestar atención a la diferencia entre lógica como teoría del razonamiento, cualquiera esta sea, y lógica en tanto teoría lógica, la cual se aplica a ciertos tipos de razonamiento o a lo que se considera lógicamente válido en determinados contextos y con un lenguaje específico. Quizás no haya algo como lo primero y lo que llamamos lógica sea sólo un conjunto de teorías lógicas. Pero al menos en la forma de hablar presente en la bibliografía existe algo como lógica en tanto aplicada al razonamiento. Tal vez la diferencia sólo sea el rango de aplicación.

**3** Por ejemplo, Cfr., Hjortland 2022, Kouri Kissel 2021 y Shapiro 2014.

anteriores a la suya, las cuales apelan a la recaptura de la lógica clásica cuando se trata de defender la aplicabilidad de alguna lógica no-clásica.<sup>4</sup>

En general, quienes buscan recapturar la lógica clásica creen que apelar a los contextos que nos llevaron a cambiar de lógica, como lo son los contextos donde existen oraciones paradójicas, no implica rechazar necesariamente principios clásicos de manera general, i.e., que los rechazemos en todo dominio del discurso. Por mi parte, lo que yo propongo es que, *es* en los contextos compartidos de aplicación donde radica la base común que posibilita el desacuerdo entre alguien que defiende la lógica clásica y alguien que defiende alguna lógica divergente a ella. Sin embargo, hacer uso de las estrategias de recaptura para responder al desafío quineano supone una reflexión sobre cómo se lleva a cabo la teorizaron y sistematización de las teorías en disputa.<sup>5</sup> Y considero que un abordaje de cómo se aplica el método de elucidación conceptual en lógica resulta indispensable para este fin.

---

**4** La propuesta de Rosenblatt está dirigida a responder un argumento de Williamson que señala una actitud “easy going” entre quienes adhieren a una lógica no-clásica. La aplicación de la estrategia de recaptura para dar respuesta al desafío quineano, hasta donde sé, no aparece en la bibliografía sobre el tema.

**5** Esto es así principalmente porque necesitamos saber cuál es la legitimidad de las teorías que vamos a comparar. Mi punto será que el método de elucidación explicita la necesidad de precisar una base común, la cual es la que tiene que ser recapturada.

## 1. La elucidación conceptual

La elucidación<sup>6</sup> se propone como un método de elaboración y precisión conceptual con determinados fines teóricos. Dicho de manera simplificada, advertimos que en una elucidación están involucrados un término-concepto a elucidar (el explicandum) y un término-concepto que es el resultado de la elucidación (el explicatum). El primer paso en este proceso es la clarificación del explicandum. La clarificación de un explicandum lidia con la ambigüedad de un término, el término del explicandum, y al hacer esto se identifica un concepto, o sea, una manera de usar ese término. Ese concepto es el explicandum. Por su parte, el explicatum, es el resultado de la elucidación, el cual también es un concepto, pero uno ligeramente diferente del explicandum, al cual designamos con el mismo término.

Un segundo paso tiene que ver con cómo se caracteriza el explicatum, si para esto se usa una definición o alguna otra estrategia. Y un tercer paso relevante es la inserción del concepto elucidado en un sistema conceptual. Si bien hay más pasos intermedios, y si bien este proceso no debe entenderse como lineal, este resumen de los componentes y pasos del proceso elucidatorio alcanza para los propósitos de este artículo. Una última aclaración al respecto: la elucidación no necesariamente se lleva a cabo apelando a un lenguaje formal. Incluso sistemas y teorías filosóficos formulados en lenguaje común desarrollan sistemas complejos de conceptos que son el resultado de elucidar conceptos expresados en el lenguaje ordinario.

Una cuestión importante al abordar el método de la elucidación será el de los vínculos que existen entre este método y lo que se entiende generalmente por definición y reingeniería conceptual. Las diferencias entre elucidación y definición tienen que ver con sus criterios de adecuación. Los criterios de adecuación de la elucidación conceptual son la similitud entre explicandum y explicatum, la exactitud del explicatum, su fructividad y cuán simple es todo el proceso. En cambio, las condiciones de adecuación de una definición se basan en la respuesta a la cuestión de si el proyecto que se tienen en mente es de carácter descriptivo o normativo. Adviértase que en el último caso la similitud entre explicandum y explicatum no es relevante; en cambio, si el proyecto es descriptivo, la similitud no alcanza, lo que se pretende es la identidad entre explicandum y explicatum, lo cual no es el objetivo de la elucidación. Sin embargo, la definición puede ser parte de la elucidación al momento de caracterizar el explicatum. Es la desatención de esta cuestión lo que a mi

---

<sup>6</sup> Sigo en esta presentación, con pocas variantes, a Carnap 1971 y Carnap 1963. Además, me baso también en la presentación que Brun 2015 hace de las versiones carnapianas de la elucidación.

parecer ha llevado a desvíos tanto en la formulación del desafío quineano como en sus variadas interpretaciones y respuestas.

Por su parte, la reingeniería conceptual es un tipo de elucidación conceptual, el cual puede ser más o menos revisionista del concepto de partida, dependiendo de los fines teóricos que la investigadora tenga en mente. Independientemente de que hablemos de elucidación (explication) o reingeniería conceptual, lo que considero más relevante para el problema del cambio de tema es la condición de la similitud, como veremos más adelante.

Ahora bien, una pregunta crucial, y que ha generado muchos debates, es ¿cuál es la naturaleza de la “transición” del explicandum hacia el explicatum?<sup>7</sup> Es decir, si esta transición supone un completo reemplazo o si se mantienen rasgos relevantes del explicandum. Carnap (1956, 7-8) a veces afirma que la transición consiste en un reemplazo, y no en una transformación ni tampoco en hacer el explicandum más exacto o preciso. Da dos razones. Primero, las reglas que rigen a explicandum y explicatum son distintas, por ende son conceptos distintos. De modo que, “hacerlo más exacto” sugeriría que es el mismo concepto. Pero, en segundo lugar, Carnap (RSE 936) afirma que el explicatum en muchos contextos toma el lugar del explicandum, lo cual significa que será usado con el mismo propósito que el explicandum. Como puede verse, hay una tensión evidente aquí: si el explicatum es usado con el mismo propósito que el explicandum, entonces, comparten reglas de uso, y por ende, tienen algo importante en común. Eso que tienen en común, sostengo, es relevante en la elucidación. No es relevante el tema de que son distintos (o ligeramente distintos), lo cual es una obviedad.

Es claro que el explicatum no reemplaza al explicandum en todos los contextos de uso o dominios de discurso, esto no puede pasar pues se asume que tienen diferencias. Tampoco pasa que el segundo se vuelva completamente inútil después de la elucidación. Las elucidaciones son llevadas a cabo con propósitos específicos. El concepto biológico de pez no reemplaza al concepto del día a día que se usa en el supermercado, en la pesca artesanal o en la gastronomía. Lo mismo sucede con la noción de conjunción veritativo-funcional respecto de la ‘y’ del lenguaje común, o con el condicional material respecto del condicional del lenguaje común.

Así, lo que tenemos que precisar son los contextos relevantes donde ese reemplazo se lleva a cabo. La pretendida mismidad de significado o, para ser más flexible, la base común semántica, radica en esos contextos. Y, como veremos más adelante, es en este punto donde son relevantes los resultados de

---

<sup>7</sup> Para una presentación detallada de esto véase Brun 2016. Para un debate interesante sobre si la elucidación es eliminativa o no del concepto expresado por el explicandum, véase Coffa 1975 y Simpson 1975.

recaptura de principios clásicos para el debate entre defensores y revisionistas de la lógica clásica, ya que es un recurso para explicitar lo que tienen en común sistemas lógicos rivales, lo cual a su vez permite hablar de un desacuerdo genuino entre quienes adhieren a dichos sistemas. Es verdad que muchas veces pasa que luego de la elucidación cambian las extensiones de los conceptos involucrados. Esto puede generar que hablemos de un cambio de tema y que esto sea incluso perjudicial para los usos y aplicaciones de los conceptos en la vida no solo intelectual sino también cotidiana: no poder seguir aplicando conceptos en contextos donde claramente debían aplicarse. Pero el problema del cambio de tema surge, en mi opinión, cuando el explicatum no es suficientemente similar al explicandum o cuando se confunden los propósitos teóricos de distintos proyectos elucidatorios. Por ejemplo, cuando uno se propone elaborar una lógica que sirva a la representación teórica de los fenómenos cuánticos en contraste con la elaboración de una lógica que rescate lo máximo posible las prácticas inferenciales en el lenguaje común.

Es debido a esto que pasa a ser relevante tener en cuenta los criterios de adecuación de una elucidación, en particular, el criterio de similitud entre explicandum y explicatum. Las condiciones de similitud especifican qué desviaciones son permitidas dado el propósito teórico establecido. Según Brun (2016), “[...] explications should be guided by conditions of similarity which specify what deviations from the use of the explicandum are acceptable for the task of explication at hand. This takes into account that ‘changing the subject’ is a notion which has to be detailed on a case-by-case basis” (pp. 1219). A mi parecer, esto es otra manera de decir que debemos precisar los contextos de (no) aplicación. De nuevo, lo que sugiero es que, para precisar esto, podemos apelar a los resultados de recaptura.

Así, las mencionadas aproximaciones metateóricas que abordan el problema del cambio de tema, que supuestamente se produce entre teorías lógicas rivales, parecen lidiar con algo parecido a la aproximación que hace Strawson (1963) a dicho problema: hacen énfasis en cuál es o cuál debería ser el uso de un término. Dicho de otro modo, confunden los criterios de la elucidación con los criterios de la definición. Desde dichas aproximaciones se cree que lo que está en juego tiene que ver con el debate entre lo normativo y lo descriptivo. Es decir, no están atendiendo a lo que es una elucidación sino sólo teniendo en cuenta a los objetivos o criterios de una definición. Algo parecido advierte Patrick Allo cuando menciona que un criterio relevante para evaluar un pluralismo lógico es si dicha postura tiene alguna utilidad o aplicación, por ejemplo, si esta visión de la lógica es una buena explicación de la práctica lógica. Respecto de este criterio afirma:

The distinction between a deductive practice and a theory of this practice is more important than the distinction between descriptive and normative theories. We can disagree about whether a given theory

gets the norms right, but we can also disagree about whether a theory is descriptively adequate. Analogously, we can be pluralists about getting the norms right or about giving a correct description. While important for our thinking about logic in general—it does matter whether logical revision is a form of theory-revision or an actual reformation of the norms for correct deductive inference—, such distinctions are less important for the issues I want to raise in this paper. The crucial import of the third criterion is that, as claims in the philosophy of logic, pluralist theses are claims about actual every day and scientific practices, and as such they should not misrepresent these practices. (Allo 2015, pp. 3)

Volviendo a la aproximación metateórica, pareciera que en ésta se acepta la polisemia de las nociones investigadas desde los pasos iniciales de la elucidación. Me parece que en parte es esto lo que hace creer a sus adeptos que no deben preocuparse por las condiciones de similitud entre *explicandum* y *explicatum*, y los lleva a proponer que no es necesaria una base común que posibilite el desacuerdo.<sup>8</sup>

Siendo más caritativos con la postura metateórica, podemos decir que el problema del cambio de tema puede ser relevante -en el sentido de que efectivamente se produce un cambio de tema- cuando, y ahora sí siguiendo a Strawson, el *explicandum* es el tema y el objetivo de la investigación, y no se lo quiere meramente con el fin de producir o participar de alguna teoría aplicada a un campo particular. Según Strawson, muchas veces el objetivo es describir cómo el término del *explicandum* es realmente usado, y analizar los problemas que surgen de ciertos usos. La idea de Strawson sería evitar problemas absteniéndose de ciertos usos.

Lo único que tengo que decir sobre dicha opción es que supone una visión muy atomista y aislada de los conceptos a elucidar. Es difícil ver cómo podría elucidarse la noción de validez sin prestar atención no solo a ciertos usos sino también atendiendo a objetivos teóricos, comparando distintas teorías existentes sobre la validez o consecuencia lógica, e incluso teniendo en cuenta distintas teorías no-lógicas vinculadas a ella. Y como dije, el problema principal para mí es que se confunden los criterios de la elucidación con los de la definición.

Con respecto a si la elucidación debe incluir definiciones, al menos Carnap no cree que esto sea necesario. Él propone también, alternativamente, postulados u oraciones reducidas para reemplazar a las definiciones.<sup>9</sup> En relación a la condición de similitud Carnap afirma: “(...) in most cases in which the *explicandum* has so far been used, the *explicatum* can be used; however close similarity is not required, and considerable differences are permitted” (LFP 7).

---

<sup>8</sup> Cfr., Hjortland 2022, Kouri Kissel 2021.

<sup>9</sup> Cfr. Carnap 2003, viii-ix

Lo que propongo es que debemos entender esto como que la similitud no tiene que ser precisada siempre, pero sí en los contextos relevantes. Quine (1980:25) afirma que el criterio de Carnap requiere sinonimia en contextos favorecidos. Y, en (1960: 258-259), Quine es más pragmático y dice que la similitud sólo exige que en contextos relevantes el *explicatum* pueda ser usado en lugar del *explicandum*. Esta segunda lectura permite interpretar la similitud según la situación y concuerda con mi propuesta. Los contextos relevantes dependerán de los propósitos que se supone el *explicatum* debe desempeñar en tanto parte de un sistema pretendido (“teoría”) de conceptos.

Una opción para precisar el criterio de similitud es por medio de la extensión de los conceptos, o sea, identidad extensional para todos los casos no-límites, o no-controversiales: el *explicatum* debe aplicarse a todo lo que el *explicandum* claramente se aplica; y no debe aplicarse o usarse en los casos en los que el *explicandum* claramente no se aplica ni usa. Además, se suele decir que es preferible que el *explicatum* sea estrecho a que sea amplio. Una interpretación negativa de la similitud sería que el *explicatum* no debe cubrir los casos no cubiertos por el *explicandum*. Sin embargo, Carnap rechaza esto, pues el *explicatum* puede cubrir casos extremos (e.g., en física, la velocidad cero, el vacío), principalmente cuando se trata de conceptos cuantitativos. Entonces, tanto los casos estrechos como los casos amplios tienen méritos.

Según Brun, hay veces que ni siquiera existe sobreposición entre *explicandum* y *explicatum*. Esto se da cuando distintos *explicatas* de un *explicandum* no coinciden. Por ejemplo, “proposición” elucidada como *función* y como *mundos posibles* al mismo tiempo. Así, la similitud no puede ser especificada en función de sus extensiones, pero debe ser caracterizada por una especificación de los contextos en los que, y los propósitos para los que, el *explicatum* puede reemplazar al *explicandum*, o sea, desempeñar la función del *explicandum*. En contraste, la sinonimia por su parte excluye la posibilidad de reclasificar objetos o nociones, e implica que el *explicatum* debe ser tan vago o exacto como el *explicandum*, lo cual es problemático para la sistematización teórica. Por esta razón, no debe entenderse la similitud como sinonimia.

De todo esto surge la pregunta de qué debe lograrse con la elucidación. En general, además de la clarificación del *explicandum* se espera tener una caracterización explícita del *explicatum* que pueda incorporarse en el sistema de conceptos pretendidos. Nota de Brun: The new definitions should be superior to the old in clarity and exactness, and, above all, should fit into a systematic structure of concepts.” (2003: v; italics GB). Y de la interpretación de Carnap de las reflexiones de Frege, Brun menciona: “His account of Frege’s explication of the number two points in the same direction. Frege’s achievement was not so much reducing the vagueness of two but giving a definition in logical terms” (RSE 935; cf. LFP 17). La equivalencia extensional y la sinonimia, entonces, son casos límite de la similitud, pero aun así legítimos. En resumen, la similitud pretendida está limitada por los objetivos teóricos. Pero a su vez, yo destacaría que la similitud tiene otra arista, la de comparar qué

tienen en común distintos *explicata*, ya que los objetivos teóricos no se pueden analizar aisladamente sino en comparación con los objetivos de teorías que compiten entre sí. De modo que, cuando se trata de precisar los relatos de la similitud, puede decirse que tenemos las siguientes opciones: similitud del *explicatum* con el *explicandum*, establecer relaciones del *explicatum* con otros conceptos del sistema pretendido, y comparación de distintos *explicata* (desde distintas teorías) del *explicandum* en cuestión.

Otro asunto discutido en los abordajes de la elucidación conceptual es el rol que juega el lenguaje natural o nuestras intuiciones pre-teóricas en el proceso elucidatorio. Algo de esto se revela en esta cita de Carnap y en la posterior respuesta de Maher 2010:

A natural language is like a crude, primitive pocketknife, very useful for a hundred different purposes. But for certain specific purposes, special tools are more efficient, e.g., chisels, cutting machines, and finally the microtome. If we find that the pocketknife is too crude for a given purpose and creates defective products, we shall try to discover the cause of the failure, and then either use the knife more skillfully, or replace it for this special purpose by a more suitable tool, or even invent a new one. [Strawson's] thesis is like saying that by using a special tool we evade the problem of the correct use of the cruder tool. But would anyone criticize the bacteriologist for using a microtome, and assert that he is evading the problem of correctly using the pocketknife? (Carnap 1963b, 938–939).

Maher hace este comentario a dicha cita:

Of course, nobody would criticize the bacteriologist, but that is because the bacteriologist's problem was not about the pocketknife. However, the relevant analogy for "one who seeks philosophical illumination of essential concepts of non-scientific discourse" is someone who seeks knowledge of proper use of the pocketknife; Carnap has offered nothing to satisfy such a person.

Carnap seems to have thought that we don't need to take problems about ordinary language very seriously because, when such problems arise, we can develop a new more precise language that serves the same purposes and avoids the problems. But in many cases our purpose is to resolve a problem about a concept of ordinary language, and Carnap has not indicated how a new more precise language can serve that purpose. (Cap. 3).

Este debate asume que la noción a elucidar siempre es la del uso ordinario (o lenguaje común). Pero, en mi opinión, se puede también elucidar nociones técnicas, o mejor aún, nociones del lenguaje común que ya han sido teorizadas

pero que, debido ciertas variaciones en los usos, requieren de ulteriores elucidaciones.

Por otra parte, considero que es importante entender el rol normativo y descriptivo que las definiciones tienen dentro de la elucidación. Como se dijo, una definición puede formar parte del proceso elucidatorio cuando se ofrece una caracterización del *explicatum*. Desde mi perspectiva, el rol normativo consiste en seleccionar los usos en función de los objetivos teóricos. Los usos de una noción, tienen que ver con el aspecto descriptivo de la teoría, los usos o la mención que se hace de ellos, obviamente es algo descriptivo; lo normativo está en la selección que se hace de algunos de ellos. La selección es normativa o estipulativa. Pero teorías lógicas rivales no son completamente estipulativas o normativas ni tampoco completamente distintas o excluyentes entre sí. Prueba de ello es que en las teorizaciones sobre la validez vemos que se comparten muchos principios lógicos o instancias de los mismos. Además de la constatación de que las expresiones lógicas que se teorizan son siempre las mismas: conjunción, negación condicional, etc.

Volviendo a Quine y al desafío del cambio de tema, lo estipulativo está en la decisión del objetivo teórico. Y por ende, en la definición del *explicatum*, pero el criterio de similitud del proceso todo pone sobre la mesa lo que se tiene en común entre distintos objetivos de teorías rivales. Quine parece haberse manifestado sólo del aspecto definicional del *explicatum*, y no de la condición de similitud del proceso, que es donde yo propongo que podemos encontrar la base común y la posibilidad del desacuerdo genuino.

## 2. Cambio de tema y elucidación en lógica

Además de Kouri Kissel 2021 y Hjortland 2022, una de las posiciones metateóricas más elaboradas respecto del problema del cambio de tema, es la de Shapiro 2014.<sup>10</sup> Como dije, estas se caracterizan por entender el problema del cambio de tema meramente como un problema terminológico-definicional. El caso de Shapiro es el más extremo pues no apela a una visión intuitiva o pre-teórica de validez ni cree que el desacuerdo genuino sea un desideratum para un pluralismo en lógica. Pero dada su postura ecléctica de la lógica, y de sus aplicaciones en matemáticas, este autor se propone indagar si el desacuerdo entre defensores de distintas teorías lógicas es genuino o no.

Shapiro empieza preguntándose si “válido” significa “la misma cosa”, y si tiene la misma extensión, en distintas teorías lógicas. Y lo mismo se pregunta de las expresiones lógicas, tanto de los conectivos como de los cuantificadores. Y vincula estas preguntas con el problema de si la disputa entre, por ejemplo,

---

<sup>10</sup> Cfr. Shapiro 2014, Cap. 4 y 5.

clásicos e intuicionistas es genuina o no. Este autor reconoce que, responder a la pregunta de si el debate entre clásicos e intuicionistas es un desacuerdo genuino o una mera disputa verbal, es una exigencia importante que se le hace a una propuesta ecléctica como la suya. Como dije, la idea de Shapiro es que estas son disputas meramente terminológicas:

I argue later that most of the questions in our first batch—those concerning words like “valid” and “logical consequence”—are merely terminological. In effect, we are wondering how to understand certain notions that are, primarily, terms of art. To be sure, words like “valid” and “consequence” are part of ordinary English, but we are focusing here on highly articulated versions of such words, developed for specific theoretical purposes in logical study. pp. 91

Así, Shapiro entiende la teorización de las nociones lógicas —tanto la de validez como las de las conectivas lógicas— más como un proyecto definicional que como un proyecto de corte elucidatorio; y, pone énfasis en el aspecto estipulativo de la definición; el rol descriptivo antes mencionado pasa a ser secundario, así como también el criterio de similitud, ya que este último es tenido en cuenta solo en la elucidación, y no en la definición. En sus palabras:

The short version of my conclusion is that the “artist” who introduces such terms of art gets to stipulate their meaning, hoping that the introduced terms help shed light on whatever is in focus, and hoping that the stipulated notions line up, in part, with ordinary usage, at least sometimes. pp. 91

Shapiro está pensando que la motivación que lleva a teorizar sobre nociones lógicas descansa en el vínculo y la importancia que estas tienen con las teorías matemáticas. Su idea es que las lógicas correctas son todas aquellas que cierran lógicamente las teorías matemáticas más importantes. A este autor no le interesa, o le parece un objetivo menor, el que la lógica sea una teorización de la noción intuitiva o pre-teórica de consecuencia. A mi parecer se puede evitar entrar en este debate de qué cuenta como intuitivo o pre-teórico, al menos respecto de esta cuestión. Como dije, la elucidación es un proceso en el cual se seleccionan ciertos usos de las nociones que interesan a quien lleva a cabo la elucidación, independientemente de si estos usos ya forman parte de una teoría o si forman parte del lenguaje y la comunicación informal pre-teórica.<sup>11</sup> Así,

---

11 Al respecto puede tenerse en cuenta la postura de Halbach 2020 para quien la noción de consecuencia lógica, cualquiera ella sea, es una noción altamente teorizada. De la versión intuitiva de la misma este autor sólo destaca la pretensión de universalidad y de preservación de verdad, las cuales él cree que son mejor logradas por versión sustitucional de la consecuencia lógica, y no por las versiones modelo-teóricas o de teoría de la prueba.

podemos decir, en general, que los usos, sean del tipo que fueren, son seleccionados con un fin teórico, lo cual nos lleva de nuevo a pensar que cuando teorizamos sobre nociones lógicas, la metodología a usar es la elucidación. Pareciera pues que Shapiro mismo está entendiendo de manera parcializada su proyecto, ya que, como señalé anteriormente, lo estipulativo puede formar parte de la elucidación, pero no es todo el proyecto. Cuando la elucidación entra en escena el criterio de similitud es el que se vuelve más relevante.

Básicamente, considero que este autor está confundiendo elucidación con definición, y tal vez esto se deba a que se está basando en una interpretación tendenciosa de esta cita de Tarski 1935:

The concept of logical consequence is one of those whose introduction into the field of strict formal investigation was not a matter of arbitrary decision on the part of this or that investigator; in defining this concept, efforts were made to adhere to the common usage of the language of everyday life. But these efforts have been confronted with the difficulties which usually present themselves in such cases. With respect to the clarity of its content the common concept of consequence is in no way superior to other concepts of everyday language. Its extension is not sharply bounded and its usage fluctuates. Any attempt to bring into harmony all possible vague, sometimes contradictory, tendencies which are connected with the use of this concept, is certainly doomed to failure. We must reconcile ourselves from the start to the fact that every precise definition of this concept will show arbitrary features to a greater or less degree. (p. 409)

En esta cita se evidencia que Tarski cree que la definición forma parte de un proceso. Al ese proceso aquí llamamos 'elucidación'. Y la arbitrariedad que Tarski menciona que es gradual, se debe a que sólo la definición del *explicatum*, como ya señalé, es de carácter estipulativo; el resto del proceso, en cambio, tiene carácter descriptivo.

Shapiro cree que la teorización del significado de las expresiones lógicas es igual de estipulativa que la de la noción de validez. Como se sabe, a las expresiones lógicas se las presentan por medio de condiciones de satisfacción o de deducibilidad. Estas condiciones constituirían el significado de los términos lógicos. Según Shapiro, esto alcanza para poner en duda el dilema quineano:

My tentative conclusion [...] is that the talk of whether the meaning of the logical terminology is the same or different in different contexts/theories is itself context-sensitive and, moreover, interest-relative—in part because such talk is vague. (p. 92).

Pero como dijimos la identidad no es el objetivo de la elucidación. La idea es mostrar aquí lo contrario, que no hay nada vago en la pregunta de si clásicos e intuicionistas tienen una disputa meramente verbal o un desacuerdo genuino. Ambas son nociones teorizadas como para que Shapiro haga semejante observación. Con respecto a la teorización de estas nociones, y si hay una consecuencia lógica pre-teórica o intuitiva, mi propuesta es que elucidamos tanto la noción intuitiva/pre-teórica como ulteriores teorizaciones de la misma. Esto a propósito de que, por ejemplo, autores como Halbach 2020 nieguen que la consecuencia lógica sea una noción intuitiva. En esta línea Shapiro afirma:

Some have taken universal applicability to be constitutive of logic: if the correctness of a given argument-form is restricted to only some domains or subjects, then that form is not logically valid, strictly speaking. Hartry Field [2009] speaks of what he calls “all purpose logic,” meaning logic that applies universally to any and all subject matters. Part of the present question is whether there is such a thing, and, if there is, how interesting and important it is. Pp. 92.

Cabe señalar que lo que estos autores entienden por intuitivo es al menos controversial. Entienden por intuitivo ciertos desiderata como la universalidad, la preservación de verdad y la formalidad; todos los cuales son obviamente teóricos. Cuando se elucida se entiende más bien por intuitivo ciertas creencias o consensos implícitos respecto de la validez de ciertos argumentos; más en la línea de lo que Priest entiende por intuiciones en lógica. Respecto a la universalidad de la lógica, Shapiro afirma:

Some have argued that if a given subject matter is universally applicable, then it is part of logic. Consider, for example, one of the stock arguments in favor of Fregean logicism (e.g., Frege [1884]): 93. Arithmetic is universally applicable, in the sense that if one has objects at all, then one can count them. The principles of counting thus apply universally. So arithmetic is logic. Or so the argument for logicism goes (or went), at least in a cartoon sketch.

Halbach por su parte sostiene que es la consecuencia lógica sustitucional la que mejor satisface el desideratum de la universalidad de la lógica. Sea como fuere, Shapiro se opone a la lógica universal - una lógica de este tipo es incompatible con su proyecto ecléctico- y cree que el problema del pluralismo lógico es algo meramente terminológico:

A rival terminological decision—the one I favor and adopt here— would be to embrace a form of folk-relativism concerning logic, insisting that

logical consequence and validity are relative to a mathematical theory or structure (or a type of structure). This would be to reject the aforementioned slogan that logic is universally valid, holding in all legitimate discourses. One who adopts this policy can then coin a new term, such as “super-valid,” for those propositions and argument forms that do hold in all legitimate (mathematical) discourses and structures. pp. 96

El criterio principal de Shapiro para desmerecer la noción de superválido es su inutilidad, el que no se corresponda con ningún uso. Si bien me parece incorrecto decir que el problema del cambio de tema es meramente terminológico - y que como dije esto es sostenido por Shapiro debido a que no diferencia bien elucidación de definición - creo, sin embargo, que esta inutilidad de la universalidad de la lógica es un aspecto interesante de la propuesta de Shapiro. La idea es básicamente que no hay ningún uso teórico o práctico que requiera una lógica aplicada a *todo contexto*. Como veremos, una idea similar subyace a los proyectos de recaptura.

### 3. Recaptura

¿Qué significa atribuir significado a una noción o concepto? ¿Qué significa que dos personas atribuyan el mismo significado a ‘gen’, a ‘humano’, a ‘lógicamente válido’, a ‘no’, etc.? ¿Se espera de esto una elucidación conceptual? ¿Una definición entendida como sinonimia? ¿Estipular condiciones necesarias y suficientes para el uso de las conectivas? ¿Parecidos de familia de las mismas? Quine parece asumir que, en el caso de las nociones lógicas, atribuir el mismo significado consiste en aceptar exactamente las mismas reglas y todas ellas en su máxima generalidad. Es este supuesto el que aquí sugiero que hay que poner en cuestión si queremos rescatar la intuición de que el desacuerdo entre dos personas que defienden distintas teorías lógicas es genuino.

Una manera de hacer esto es flexibilizar nuestra concepción de lo que entendemos por *aceptar una regla*. Puede decirse que quien defiende una lógica divergente de la clásica en algún sentido acepta también los principios clásicos: quien adhiere a una lógica paracompleta acepta la ley del Tercero Excluido (LEM) para la mayoría de los dominios del lenguaje; y lo mismo hace con la regla de Explosión quien defiende una lógica Paraconsistente o Dialeteísta. En particular, paracompletistas y dialeteístas creen que dichos principios tienen contraejemplos sólo en contextos o dominios paradójicos, y es en estos dominios en donde hay que evitar usar ciertas reglas clásicas. De esta manera, en contextos no paradójicos las conectivas lógicas de distintas teorías lógicas seguirían siendo definidas por las mismas reglas. Algo parecido podemos decir de quien defiende una lógica intuicionista: sólo rechaza LEM cuando se trata de contextos en los que se entiende el infinito de manera clásica.

Vemos que, a pesar de que desde las lógicas rivales de la clásica se pretende mostrar que los principios clásicos tienen contraejemplos en ciertos contextos, esto no significa rechazar la validez de esos principios en todo contexto. Una manera de dar cuenta de esto formalmente es por medio de los resultados de recaptura: quien defiende una lógica divergente puede *recapturar* la validez de los principios clásicos para aquellos contextos que considere ‘seguros’; o al menos, no paradójicos.<sup>12</sup>

### **Resultados de Recaptura:**

Quienes cuestionan el estatus teórico privilegiado de la lógica clásica tienen que dar cuenta de varios desafíos. Uno de los principales tiene que ver con el hecho de que la lógica clásica se da como supuesta en casi todas las teorías científicas, principalmente, en matemáticas. Incluso la metateoría de las lógicas no-clásicas se suele presentar usando lógica clásica. La gran pregunta es si quien suscribe a una lógica no-clásica debería usar en su metateoría la lógica que pretende cuestionar ¿acaso no es al menos extraño que use los principios que está poniendo en cuestión?

La respuesta de quienes suscriben a una lógica no-clásica es que lo que motiva la revisión de los principios clásicos son oraciones muy específicas, que no es necesario rechazar la lógica clásica en todo contexto o dominio de discurso. Por este motivo, pueden aceptarse instancias de los principios clásicos rechazados si nos encontramos en contextos “seguros”. La idea sería recapturar la lógica clásica para esos contextos. Si la matemática o aritmética contase como un contexto seguro, podría usarse -diría un lógico no-clásico- para hacer la metateoría de su lógica, incluso podría usarse principios clásicos para obtener consecuencias de una teoría física o sociológica, si los enunciados de estas disciplinas se considerasen seguros.

Sin embargo, el gran problema es cómo saber que estamos en contextos seguros. Por ejemplo, un tipo de recaptura de principios clásicos, puede ser para aquellos contextos en los cuales tengamos oraciones que no contengan el predicado de verdad, ya que, como se sabe, el predicado de verdad – o el principio que rige su uso, a saber, el Esquema-T, más otros supuestos conocidos, suelen llevar a contradicción. Rosenblatt 2022 cataloga a esta estrategia como un tipo de recaptura moderada. Usando como caso de análisis a alguien que suscribe a una Lógica Paracompleta Strong Kleene, Rosenblatt

---

<sup>12</sup> Cfr., Rosenblatt 2020a y Rosenblatt 2022. Este autor desarrolla muchos tipos de recaptura, desde las más radicales hasta las más moderadas. Un punto interesante que pienso trabajar posteriormente es cuál de éstas se ajusta más a la elucidación de las conectivas lógicas o si estos resultados sólo sirven para la elucidación de la noción de validez, y no para la elucidación de las conectivas lógicas.

presenta distintas maneras de recapturar la ley del Tercero excluido.<sup>13</sup> Resumo a continuación algunas de las opciones:

Recaptura clásica moderada:  $\phi \vee \neg\phi$  se acepta si y solo si  $\phi$  no contiene apariciones del predicado de verdad.

Los contextos seguros serían aquellos en los que no aparece el predicado de verdad. Este tipo de recaptura es moderada porque hay muchas oraciones que no se rescatarían: todas las predicaciones de verdad de oraciones de distintas teorías científicas y también de oraciones del lenguaje natural. Si pensamos que es deseable tener predicaciones de verdad, o en todo caso, que hay predicaciones de verdad seguras o no problemáticas, deberíamos recapturar más oraciones, y eso involucra ser más precisos con lo que pretendemos recapturar. Una opción es recapturar los principios clásicos para aquellas oraciones que no conduzcan a contradicción, es decir, recapturar todas las oraciones excepto las de contextos paradójicos; suponiendo que estos últimos se pudiesen aislar:

Recaptura clásica radical:  $\phi \vee \neg\phi$  se acepta si y solo si  $\phi$  no es paradójica.

Esto nos permitiría usar tercero excluido en contextos no paradójicos. Sin embargo, Rosenblatt muestra que esta opción tiene un serio problema: existen instancias del tercero excluido que no son paradójicas en sí mismas pero que sí lo son en conjunción con otras instancias. Dicho de otro modo, no existe un conjunto maximal consistente de instancias del tercero excluido. Siendo  $\tau$  la oración del honesto que dice de sí misma que es verdadera y  $\lambda$  la oración del mentiroso que dice de sí misma que no es verdadera, el autor ofrece como ejemplo de instancias no paradójicas del tercero excluido las siguientes oraciones:

Instancia del tercero excluido:  $(\tau \vee \lambda) \vee \neg(\tau \vee \lambda)$

---

**13** La maquinaria formal de esta propuesta supone un lenguaje de primer orden con las conectivas y cuantificadores usuales más un predicado de verdad y una manera de nombrar a las oraciones del lenguaje. La interpretación de este lenguaje es la que se conoce como una interpretación Strong Kleene que tiene como valores semánticos  $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$ . Esta interpretación tiene que satisfacer las condiciones habituales para el vocabulario lógico (teniendo en cuenta la diferencia que representa el haber introducido el valor  $\frac{1}{2}$ , el cual representa la idea de que un enunciado puede ser ni verdadero ni falso). Si se satisface que la valuación de  $\text{Tr}'\phi$  es igual a la valuación de  $\phi$ , tendríamos una interpretación Kleene-Kripke. Esta interpretación es un punto fijo en el sentido de Kripke (1975). Para una presentación sucinta de estos detalles técnicos, véase Rosenblatt 2022 pp. 4-13.

Otra instancia del tercero excluido:  $(\neg\tau \vee \lambda) \vee \neg(\neg\tau \vee \lambda)$

Estas instancias tomadas por separado no son paradójicas pero sí lo son tomadas en conjunto: no existe ninguna interpretación-Kleene-Kripke que las satisfaga. Este problema lleva al autor a proponer otra caracterización de la noción de recaptura basada en la noción de oración fundada:

Recaptura clásica fundada:  $\phi \vee \neg\phi$  se acepta si y solo si  $\phi$  es fundada.

Una oración fundada es aquella cuya verdad depende de hechos no semánticos. Así, oraciones como la del mentiroso o del honesto no serían oraciones fundadas. Los contextos seguros en los cuales seguirían valiendo los principios clásicos serían aquellos donde contamos sólo con oraciones cuya verdad depende sólo de hechos no-semánticos.

Existen muchos detalles omitidos en esta presentación de la noción de recaptura. De hecho, gran parte del artículo de Rosenblatt consiste en proponer un predicado de fundación definido de manera precisa para un lenguaje específico que le permita lidiar con algunos de los problemas que tiene la noción de oración fundada. Sin embargo, lo que yo pretendo en este resumen es meramente mostrar que existen maneras de precisar cómo sería la base común semántica entre lógicas rivales. En principio, esta estaría dada por los contextos no problemáticos de aplicación de los principios en disputa. Como se vio en secciones anteriores, una manera ampliamente aceptada de dar cuenta del criterio de similitud consiste en precisar los contextos de aplicación común del *explicandum* y el *explicatum*.

Hasta donde sé, no existen propuestas que intenten dar cuenta de la base común semántica entre lógicas rivales apelando al criterio de similitud de la elucidación y a los resultados de recaptura. Si bien aquí solamente he esbozado esta posibilidad, mi idea en posteriores trabajos es definir un predicado de similitud que tenga en cuenta los contextos compartidos de aplicación de principios lógicos, el cual sirva para mostrar el significado en común que tienen conectivas lógicas de sistemas lógicos rivales. Por ejemplo, lo que tendría en común la negación clásica y la negación paraconsistente o paracompleta. El objetivo, como ya se dijo es explicitar la base común semántica que posibilite el desacuerdo genuino.

### 3. 2. Posibles Objeciones:

Si bien el recurso al resultado de *recaptura* para lograr la base común es al menos interesante, el mismo podría recibir las siguientes objeciones. Primero, alguien podría objetar que, por ejemplo, la Falacia de Afirmación del Consecuente (FAC) deja de ser válida en algunos contextos (i.e., tiene

contrajemplos), y eso ya alcanza para rechazarla como válida en *todo contexto*. Sin embargo, como respuesta a esto podemos señalar una diferencia crucial entre rechazar FAC y rechazar, por ejemplo, LEM o Explosión: existe un relativo consenso respecto de cuáles son los contextos en los que paracompletistas y dialeteístas niegan la validez de ciertos principios clásicos, como Ex Falsum y LEM respectivamente. En cambio, los contextos en los cuales la conclusión no es una consecuencia lógica de las premisas, para el caso de la FAC, no son fácilmente aislables. Esto nos lleva a distinguir entre principios inválidos, como FAC, y aquellos cuya validez, en determinados sistemas no se acepta de manera irrestricta, como es el caso de Explosión y LEM para las lógicas paraconsistente y paracompleta, respectivamente. El hecho de que para la mayoría de contextos tanto LEM como Explosión son aceptables mediante mecanismos de recaptura por las lógicas no-clásicas, garantiza un significado común de base entre ellas. De nuevo, en dichos contextos las conectivas serán regidas por las mismas reglas, y, por ende, tendrán el mismo significado.

Otro posible problema de esta manera de lograr la base común es el siguiente: no comparamos las teorías lógicas respecto de los contextos seguros sino respecto de los contextos problemáticos, o sea respecto de cómo lidian, por ejemplo, con las paradojas.<sup>14</sup> Esta posible objeción es la que me parece más interesante y lo único que tengo para decir, por el momento, es que la comparación entre teorías lógicas tiene que ser holista: tiene que abarcar tanto los contextos “seguros” como los contextos paradójicos. Dicho de otro modo, una teoría lógica no puede tener como único objetivo el dar cuenta de las paradojas semánticas, sino que no hay que perder de vista que la aplicación canónica de una lógica es el razonamiento humano.

Otra forma de garantizar la mismidad de significado es posible si consideramos lógicas distintas que validan los mismos principios y reglas. Este es el caso de la Lógica Clásica y la Lógica de la Estricta Tolerancia (ST). La lógica ST, a diferencia de la lógica paracompleta o la lógica dialeteísta, valida exactamente las mismas reglas y los mismos principios que la Lógica Clásica. La diferencia entre ellas se da en el nivel meta-inferencial, en particular, quien defiende una lógica ST rechaza la metaregla de Corte (o transitividad).<sup>15</sup> Sin embargo, aquí surge el problema de si las reglas estructurales de un sistema lógico juegan un rol en el significado de las conectivas lógicas o no. Si sí lo hacen, se puede pensar en la recaptura de los principios estructurales de la relación de consecuencia lógica. Este tema será objeto de una investigación ulterior.

---

<sup>14</sup> De hecho, esta es una idea presente en Williamson 2016. Este autor considera que el gran asunto de la lógica es poder dar cuenta de las paradojas semánticas. En este sentido véase también Priest 2016.

<sup>15</sup> Cfr., Cobreros et al (2012).

### 3. Conclusión

Finalizamos diciendo que en muchas de las disputas lógicas que hemos reseñado existen maneras de sentar una base común mínima de significado que posibilite el desacuerdo. La importancia de precisar esta base común, a diferencia de lo que creen las propuestas metateóricas, radica en entender las teorizaciones en lógica como proyectos elucidatorios y no meramente definicionales. Al menos eso es lo que he pretendido mostrar aquí.

### Bibliografía

- Allo, P. (2015). Synonymy and intra-theoretical pluralism. *Australasian Journal of Philosophy*, 93(1), 77–91. <https://doi.org/10.1080/00048402.2014.930498>
- Brun, G. (2016). Explication as a method of conceptual re-engineering. *Erkenntnis*, 81(6), 1211–1241.
- Carnap, R. (1963). Replies and systematic expositions. En P. A. Schilpp (Ed.), *The philosophy of Rudolf Carnap* (pp. 859–1013). Open Court.
- Carnap, R. (1971). *The logical syntax of language*. Routledge.
- Coffa, J. A. (1975). Dos concepciones de la elucidación filosófica. *Crítica*, 7(21), 43–67.
- Golan, R. (2019). Is there a neutral metalanguage? *Synthese*, 198, 4831–4858.
- Haack, S. (1978). *Philosophy of logics*. Cambridge University Press.
- Halbach, V. (2020). The substitutional analysis of logical consequence. *Noûs*, 54, 431–450. <https://doi.org/10.1111/nous.12256>
- Hjortland, O. T. (2013). Logical pluralism, meaning-variance and verbal disputes. *Australasian Journal of Philosophy*, 91(2), 355–373.
- Hjortland, O. T. (2022). Disagreement about logic. *Inquiry*, 65(6), 660–682.
- Kouri Kissel, T. (2021). Metalinguistic negotiation and logical pluralism. *Synthese*, 198(Suppl. 20), 4801–4812. <https://doi.org/10.1007/s11229-019-02264-z>
- Maher, P. (2010). *What is probability?* [Manuscrito]. <http://patrick.maher1.net/preprints/pop.pdf>
- Quine, W. V. O. (1980/1951). Two dogmas of empiricism. En *From a logical point of view* (2.<sup>a</sup> ed., pp. 20–46). Harvard University Press.
- Quine, W. V. O. (1960). *Word and object*. MIT Press.
- Quine, W. V. O. (1986). *Philosophy of logic* (2.<sup>a</sup> ed.). Harvard University Press.

- Priest, G. (2016). Revising logic. En P. Rush (Ed.), *The metaphysics of logic* (pp. 211–223). Cambridge University Press.  
<https://doi.org/10.1017/CBO9781139626279.016>
- Rosenblatt, L. (2020a). Maximal non-trivial sets of instances of your least favorite logical principle. *The Journal of Philosophy*, 117, 30–54.  
<https://doi.org/10.5840/jphil202011712>
- Rosenblatt, L. (2022). Should the non-classical logician be embarrassed? *Philosophy and Phenomenological Research*, 104, 388–407.  
<https://doi.org/10.1111/phpr.12770>
- Shapiro, S. (2014). *Varieties of logic*. Oxford University Press.
- Simpson, T. M. (1975). Análisis y eliminación: una módica defensa de Quine. *Crítica*, 7(21), 69–83.
- Strawson, P. F. (1963). Carnap's views on constructed systems versus natural languages in analytic philosophy. En P. A. Schilpp (Ed.), *The philosophy of Rudolf Carnap* (pp. 503–518). Open Court.
- Tarski, A. (1956/1935). On the concept of logical consequence. En *Logic, semantics, metamathematics* (pp. 409–420). Clarendon Press.

# Conocimiento e ignorancia en una lógica epistémica sintáctica

Luis Adrián Urtubey

Universidad Nacional de Córdoba; Córdoba, Argentina

[luis.urtubey@gmail.com](mailto:luis.urtubey@gmail.com)

El propósito de este trabajo es examinar algunas limitaciones que se presentan cuando se intenta expresar formalmente ciertos tipos de ignorancia de un agente usando sólo modelos de Kripke en esta representación epistémica. Sostendremos que estos problemas pueden abordarse desde la perspectiva que plantea S. Artemov, en trabajos recientes, respecto a las dificultades de la lógica epistémica, en general, para alcanzar una representación adecuada de los escenarios epistémicos descritos sintácticamente. Concluiremos indicando posibles desarrollos de las alternativas planteadas y algunas aplicaciones relacionadas con contextos de enseñanza-aprendizaje.

**Palabras claves** | Ignorancia; lógica epistémica; lógica de la justificación.

## 1. Introducción

En trabajos recientes, S. Artemov ha destacado un hecho significativo sobre la representación de escenarios epistémicos a través de modelos de Kripke, que pone en cuestión la capacidad de estos últimos para dar cuenta formalmente de situaciones en las que ‘el estado de naturaleza’ particular es representado por un conjunto de proposiciones, que no constituyen conocimiento común, como surge del siguiente párrafo:

“Kripke models constitute a comprehensive semantic tool in modal logic: every consistent configuration is realized in an appropriate node of the canonical model. However, in modal logic we don’t normally care how “possible” the states in a Kripke model are, their formal consistency is sufficient. Epistemic scenarios are different. We can imagine a situation in which some propositions  $\Gamma$  (e.g., reflecting the state of nature) should hold at all possible states. Furthermore, if this  $\Gamma$  is not common knowledge the corresponding set of states is, generally speaking, not a Kripke model, and requires a broader approach.”<sup>1</sup>

En consecuencia, Artemov propone reemplazar los modelos de Kripke en lógica epistémica por los que denomina ‘Modelos Epistémicos’. Lo que resulta de esta manera de proceder es una versión ‘sintactizada’ de la semántica para la lógica (modal) epistémica. En consonancia con esto, el mencionado autor afirma:

“An epistemic situation can be regarded as a (global) epistemic state  $s$ . Such an  $s$  can be specified directly (...) An appropriate Kripke-style model is also a possible specification device: we build a Kripke model  $K_s$  in which  $s$  is a possible world...However, when building  $K_s$ , we have to (1) add to the model (sometimes excessively many) extraneous worlds just to emulate ignorance; (2) make a dubious assumption of common knowledge of  $K_s$ . Whereas (1) is mostly an inconvenience, (2) is not well principled. State  $s$  can get an explanation within a Kripke model  $K_s$ , but one should not expect this explanation to be epistemically satisfactory.”<sup>2</sup>

En este pasaje resulta especialmente relevante la afirmación respecto al costo que impone el uso de los modelos de Kripke, cuando se trata de ‘emular la ignorancia’. ‘Mayormente un inconveniente’, se señala aquí, que no hace justicia a la representación buscada. Asimismo, esto marca una distancia real entre la descripción sintáctica de un escenario epistémico frente a su formalización en un modelo de Kripke (único).

---

1 Artemov, S. (2020).

2 Artemov, S. (2022).

Para ilustrar algo más el punto, veamos un ejemplo, relativo a un agente que ignora un estado epistémico. Resulta que los modelos de Kripke carecen de sentido aquí. Acotemos sólo -a fines de entender el ejemplo- que **K** es el operador de conocimiento implícito de la lógica epistémica.

“Here is a natural example, Ignorant Agent, of an epistemic state with clear semantics and with only infinite and nonsensical Kripke models... Consider  $S_4$  with a single propositional letter  $p$  and a situation in which  $p$  is true, but the agent has no any specific knowledge about  $p$ :  $\Gamma = \{p\} \cup \{\neg \mathbf{K}F \mid S_4 \not\models \mathbf{K}F\}$ , yields a singleton epistemic model...”<sup>3</sup>

Al respecto, Artemov comenta:

“It can be shown that  $\Gamma$  is consistent and complete and hence defines an epistemic state, i.e., a singleton epistemic model. Epistemic model  $E$  has state  $\Gamma$ , accessibility  $\Gamma R \Gamma$ , and  $\Gamma \models F$  iff  $\Gamma \vdash F$ . i.e., all non-provable in  $S_4$  knowledge assertions are declared false.”<sup>4</sup>

Lo que se aprecia a partir del ejemplo anterior es que  $E$  es un modelo epistémico decidible, que consiste en un conjunto unitario dotado de una semántica muy nítida. Asimismo, todo modelo de Kripke para  $E$  es infinito, lo cual no tiene ya demasiado sentido. Debe contener en forma explícita mundos donde resulten falsas todas las fórmulas  $F$  ignoradas según  $S_4$ , i.e.  $S_4 \not\models \mathbf{K}F$ , lo que no tiene demasiado sentido -como dijimos- ya que  $S_4$  es decidible y no haría falta incorporar todos estos mundos para definir  $\Gamma$ .

En línea con lo expuesto hasta aquí, señalemos que el propósito de este breve trabajo es examinar algunas limitaciones ‘técnicas’, que se presentan cuando se intenta expresar formalmente ciertos tipos de ignorancia de un agente, usando sólo modelos de Kripke en esta representación epistémica. Sostendremos que estos problemas pueden abordarse desde la perspectiva que plantea S. Artemov, en trabajos recientes, que venimos comentando, respecto a las dificultades de la lógica epistémica, en general, para alcanzar una representación adecuada de los escenarios epistémicos descritos sintácticamente. Concluiremos indicando posibles desarrollos de las alternativas planteadas y algunas aplicaciones relacionadas con contextos de enseñanza-aprendizaje.

## 2. Ignorancia: dos definiciones

En el último ejemplo, que referimos anteriormente, se intenta reflejar la situación de una agente, que carece de todo conocimiento específico sobre una proposición  $p$ . Es decir, que se puede considerar que esta agente ignoraría  $p$ .

---

<sup>3</sup> ibid, op et loc cit.

<sup>4</sup> Artemov, S. (2022).

Ahora bien, en términos epistémicos más específicos, cómo cabe entender esto. En la literatura epistémica reciente sobre el tema, encontramos dos definiciones centrales sobre la noción de ignorancia. Así, Rick Peels señala:

“Exactly how propositional ignorance is to be analyzed—among other things, whether it is indeed the opposite of knowledge—is a matter of controversy. Some take it that ignorance is lack of knowledge [the Old View], whereas others have argued that it is lack of true belief [the New View]. Still others have suggested that it is the lack of true belief that follows from a violation of a duty to inquire.”<sup>5</sup>

En el texto aquí referido, Peels presenta, asimismo, un caso particular de ignorancia, que puede llamarse de ‘ignorancia inducida’. Dice Peels:

“I want to zoom in on scenarios where the educator has good educational reasons for wanting to make the student aware that she lacks knowledge without in the process supplying her with an epistemic basis that would enable her to have the target knowledge.”<sup>6</sup>

Asumiendo que en el caso existe una creencia verdadera, continúa:

“It might be important to the educator that the student identifies the epistemic basis for her true belief herself. (...) if the student is given good reasons for thinking she lacks knowledge without at the same time being given a new epistemic basis for her true belief, this will ordinarily lead to the student losing her belief, at least until she identifies a new epistemic basis for believing it.”<sup>7</sup>

Identificando ya más precisamente de qué tipo de ignorancia se trataría, el autor concluye:

“At least on the New View on ignorance, it follows that this educational practice is generating ignorance. Normally, this will be suspending ignorance, as the subject is likely to now suspend judgment on the true target proposition. Moreover, the educational practice is clearly geared toward specifically epistemic ends, as the educator’s goal is to encourage the student to identify an adequate epistemic basis for the belief herself.”<sup>8</sup>

Este tipo de ignorancia, que identifica aquí Peels y que constituye un caso de ignorancia que podemos denominar ‘suspensiva’, es de la que nos ocuparemos en particular en este trabajo. Consideremos, por caso, que G designa la conocida ‘oración de Gödel’ y que tenemos el siguiente escenario:

---

<sup>5</sup> Peels, R. (2023).

<sup>6</sup> Ibid, op.cit.cap. 9.

<sup>7</sup> Peels, R. (2023), loc.cit.

<sup>8</sup> Ibid, op.cit.cap. 9.

$S$ : ‘ $G$  es verdadera’. Bob cree que  $S$  con una justificación  $s$ . Pero  $s$  no es una justificación aceptada -ni aceptable- para  $S$ .

Por ejemplo, Bob ofrece como justificación  $s$  para la proposición  $S$ , que ‘un lógico como Gödel no podría haber sostenido algo falso’. Sin duda, Bob carece, en este caso, de todo conocimiento acerca de lo afirmado en  $S$ .

Si nos preguntamos acerca de cómo formalizar este escenario, una propuesta podría ser:

$$\Gamma = \{S, \mathbf{BS}, \neg\mathbf{KS}\}$$

Con los operadores epistémicos usuales de conocimiento implícito,  $\mathbf{K}$  y creencia  $\mathbf{B}$ . Pero notamos en seguida, que aquí no hay referencia a la justificación ( $s$ ), lo que realmente cuenta. La manera de incluirla sería recogiendo la idea de que el agente tiene consciencia del tipo de justificación que tiene para  $S$ . Esto es, un modelo que incorpore lo que en lógica epistémica se conoce como *awareness*:

$$M = \langle W, R_i, \models, A \cup K \rangle,$$

donde  $A$  y  $K$  son conjuntos de ‘justificaciones aceptadas’ y justificaciones que ‘producen conocimiento’, respectivamente.

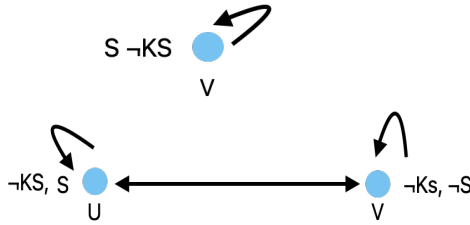
Para seguir con la elaboración del ejemplo, incorporamos otra agente, Ann, que se percata de la situación en que se encuentra Bob y agreguemos dos justificaciones aceptadas para  $S$ , que Ann podría conocer, siguiendo, por caso, alguna publicación sobre el tema<sup>9</sup>: la justificación ‘tradicional’ ( $w$ ) más aceptada y compartida por muchos autores y una más peculiar ( $v$ ), más cuestionada -la dada por Dummett, por ejemplo. Agreguemos que Ann se inclina por  $w$  y que sea esta la que genera conocimiento. Veamos cómo puede desarrollarse ahora el escenario de ‘Ignorancia inducida’ o ‘suspensiva’ (*suspending ignorance*).

Bob cree que la oración de Gödel ( $G$ ) es verdadera’ ( $S$ ). Ann induce en Bob la ignorancia sobre  $S$ . Es decir, que epistémicamente hablando, Ann interviene a través de un ‘anuncio’ -puede ser público o privado- que produce este resultado. Bob es consciente ahora de que  $s$  no es una justificación aceptada para  $S$  y por ello, que no sabe  $S$ . En consecuencia, Bob suspende el juicio sobre  $S$ .

¿Cómo formalizar este nuevo escenario final?  $S$  es el caso, pero Bob ya no tiene consciencia de ello y lo ignora. En términos de modelos, las representaciones podrían ser las siguientes<sup>10</sup>:

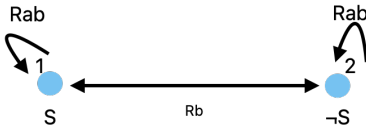
<sup>9</sup> Cfr., por ejemplo, Serény, G. (2011).

<sup>10</sup> Los modelos aquí usados están adaptados de los usados por Artemov para ejemplificar casos análogos. Cfr. Artemov, S. (2022).



El modelo de la izquierda hace justicia a la descripción sintáctica del escenario, pero no es un modelo de Kripke (sería un modelo epistémico). El de la derecha, es un modelo de Kripke, pero para representar el escenario en cuestión se debe agregar un mundo para  $\neg S$ , que no está en el escenario dado y representa, en realidad, incertidumbre (sobre la verdad de  $S$ ) y no el hecho de que Bob no tiene consciencia de que  $S$  sea el caso.

Complejizando un poco más el punto, consideremos ahora un escenario más, en que Ann comparte con Bob información sobre  $S$ . Pero resulta, que Bob no llega a ‘ver’ la cuestión en la información que le proporciona Ann. La situación sería esta, según el modelo de Kripke.



En este modelo encontramos varios problemas respecto a dar cuenta del escenario descrito.

1- Las especificaciones del modelo (único), que se selecciona son completas (i.e. todas las proposiciones están especificadas). Mientras que la descripción (sintáctica), como pasa en general, es incompleta.

2- La sobre-especificación puede verse en que hay proposiciones verdaderas en el modelo, que no se siguen de la descripción:

- **KA¬KBS** - Ann (A) sabe que Bob (B) no sabe  $S$ ;
- **KBKA(w)S** - Bob sabe que Ann sabe si  $S$ ;
- etc.

### 3. El planteo desde una lógica epistémica sintáctica

Como señalamos ya en este trabajo, nos proponemos considerar formalmente la cuestión de la ignorancia en la cual es colocado un agente epistémico cuando abandona una creencia en una proposición, suspendiendo momentáneamente el juicio sobre la misma. La que se ha dado en llamar también ‘ignorancia inducida’. Entendemos lo de ‘agente epistémico’ en un sentido muy amplio, que abarca individuos de diversa naturaleza, en particular, personas y también otros mecanismos artificiales creados con diversos fines<sup>11</sup>. En esta sección articularemos la propuesta que efectuaremos sobre tres puntos, sobre todo. Retomamos el ejemplo, que servirá de motivación y disparador para la aplicación de sistemas lógicos a este caso particular. Presentaremos luego los sistemas lógicos que proporcionarán las herramientas para abordar el problema. Finalmente, procuraremos mostrar en qué forma la lógica aplicada en este caso puede dar cuenta del problema propuesto.

Lo que motiva la lógica epistémica sintáctica, que introduce Artemov, son las derivaciones desde un conjunto de fórmulas  $\Gamma$  (hipótesis o supuestos), que describen un escenario epistémico. Luego, puede haber un modelo en que se satisfaga este conjunto de fórmulas y sus consecuencias, pero bien podría resultar que no lo hubiese. A su vez, el conjunto  $\Gamma$  y las consecuencias que se siguen de éste ponen restricciones a los modelos que expresan semánticamente este escenario. Lo semánticamente definible está emparentado con escenarios deductivamente completos.

A los fines de alcanzar nuestro objetivo, tenemos que detenernos, ante todo, en algunos aspectos de la lógica epistémica sintáctica propuesta por Artemov, la cual adoptamos en nuestro enfoque. Haremos esta presentación en forma breve, siguiendo el artículo “Towards Syntactic epistemic logic” y marcando en lo posible los rasgos centrales, sin detenernos mayormente en los detalles, a fin de no extender demasiado el trabajo, sólo con esta exposición, que si bien necesaria, no resulta conveniente concentrarse demasiado en ella.

Para motivar la introducción de una lógica epistémica sintáctica, Artemov señala que en una amplia clase de escenarios epistémicos no se definen aserciones epistémicas de orden superior y más bien se dirigen al conocimiento individual, conocimiento mutuo y de limitada profundidad, conocimiento asimétrico, etc. De allí, que estos escenarios no sean deductivamente completos y no tengan una caracterización en un único modelo.

---

<sup>11</sup> Entre estos, por ejemplo, los actualmente tan estudiados ‘modelos grandes de lenguaje’ (LLM), cuyas capacidades para manejar escenarios epistémicos bien pueden ser escrutadas por estos medios.

Algo así, de hecho, pasa con el ejemplo que venimos considerando. El escenario epistémico no define aserciones epistémicas de orden superior, sino más bien toma en consideración el conocimiento individual. El conocimiento también está acotado en profundidad y es asimétrico. El hecho es que el escenario es deductivamente incompleto. En consecuencia, tampoco se puede asumir el conocimiento común del modelo.

Tanto  $a_1$  como  $a_2$  pueden reconstruir estos razonamientos, básicamente, en la lógica epistémica con justificaciones, LEJ, que brevemente expondremos más abajo.<sup>12</sup>

Cabe señalar, no obstante, que deberían considerarse más elementos involucrados en este caso, tales como una jerarquía entre las agentes por su conocimiento y la incidencia de unas sobre otros (profesor-estudiante). Pasaremos por alto estos aspectos en esta presentación más bien básica. Cuestiones de este tipo están atendidas en Baltag & Smets (2024), cuya incorporación en este contexto podría bien explorarse.<sup>13</sup>

Asimismo, hay que tener en cuenta que no queda precisamente expresada aquí la ‘acción’ de inducir la ignorancia propiamente dicha por parte de una agente sobre la otra. Sería deseable que esto se representase a su vez por un operador o una modalidad para hacer totalmente justicia a la presentación. De hecho, es algo digno de elaborar y queda como propuesta para futuros trabajos. En el presente, sólo el ‘anuncio’ de  $a_2$  cuenta en este sentido.

Señalamos recién, que tendremos que echar mano, a los fines de desarrollar esta aplicación, de la lógica epistémica sintáctica de Artemov (*LES*). No obstante, precisando un poco más este punto, resultará más conveniente recurrir no exactamente a la lógica modal S5, como lo hace Artemov en su *LES*, sino a su ‘lógica epistémica con justificaciones’ (*LEJ*), una lógica que extiende la lógica proposicional modal S4 o S5 con justificaciones; más precisamente, con un álgebra de términos para expresar las justificaciones sobre las correspondientes proposiciones.

Algunas ganancias resultan particularmente destacables en el enfoque adoptado, en cuanto a simplicidad. Sobre todo, hay que destacar que las actualizaciones de información (*updates*) son monotónicas. No se trata de que se cambie una información por otra, sino que no hay información en un comienzo. No puede decir el agente que sabe  $S$ . De hecho, en seguida puede ver que carece de una real justificación. Es decir, que no se produce un cambio, sino que ahora sólo se toma consciencia de que no se sabe algo. Como la justificación

---

<sup>12</sup> Cfr. Artemov y Nogina (2005).

<sup>13</sup> Baltag, A. & Smets, S. (2024).

(o la falta de justificación) es explícita, esta toma de consciencia (*awareness*), la acompaña.

#### 4. Lógica epistémica con Justificaciones

Sin detenernos demasiado en esto, presentaremos lo fundamental de la lógica epistémica con justificaciones, que desarrollan Artemov & Nogina (2005), combinando la lógica de la justificación con la lógica epistémica del conocimiento implícito.

En la lógica de la justificación, desarrollada a partir de la lógica de las demostraciones o pruebas (LP), la justificación de una proposición se expresa, justamente, a través del uso de términos, denominados p-polinomios, que denotan, precisamente, demostraciones. Asimismo, estas demostraciones se pueden entender como acciones doxásticas, ejercidas por una agente epistémica. A partir de esta idea, los términos antes referidos se pueden agregar también sin inconvenientes a un lenguaje de lógica epistémica.

**Definición 01:** Los denominados p-polinomios se construyen a partir de una cantidad enumerable de p-variables ( $x, y, z, \dots$ ) y una cantidad enumerable de p-constantes ( $a, b, c, \dots$ ) mediante las operaciones binarias  $+$  (suma) y  $\cdot$  (aplicación) y la operación unaria  $!$  (inspección).

Designamos con  $PVar$  al conjunto de p-variables y con  $Pol$  al conjunto de p-polinomios.

El lenguaje original de la lógica de las pruebas o demostraciones (LP), se obtiene como una extensión del lenguaje proposicional clásico con las conectivas  $\neg$  y  $\wedge$ . Las demás conectivas del cálculo proposicional se pueden definir del modo usual, a partir de este conjunto mínimo. Si  $t \in Pol$  y  $p \in Var$ , el conjunto de fórmulas de LP se define del siguiente modo:

$$A := p \mid \neg A \mid A \wedge A \mid t:A$$

La fórmula  $t:A$  se lee “ $t$  es una justificación para  $A$ ”.

**Definición 02:** La axiomatización estándar de LP consta de los siguientes axiomas y reglas:

LP0 Algún conjunto de axiomas de la lógica proposicional clásica.

LP1  $s:(A \rightarrow B) \rightarrow (t:A \rightarrow (s \cdot t):B)$

LP2  $t:A \rightarrow !t:A$

LP3  $s:A \rightarrow (s+t):A, t:A \rightarrow (s+t):A$

LP4  $t:A \rightarrow A$

R1  $\vdash A$  junto con  $\vdash A \rightarrow B$  implica  $\vdash B$  (modus ponens)

R2  $\vdash c:A$ , si  $A$  es un axioma de LP0–LP4 y  $c$  es una  $p$ -constante.

Los axiomas LP1–LP4 tienen su motivación en consideraciones epistémicas relacionadas con la noción de justificación. El axioma para la operación de aplicación LP1 está en línea con supuestos aceptables, que subyacen a los conocidos ejemplos Gettier. Los axiomas de monotonicidad LP3 pueden encontrar una motivación en la condición de no-derrotabilidad del conocimiento, sugerida por algunos epistemólogos. Según esta condición, conocimiento es creencia verdadera justificada, si no hay un ‘derrotador’, esto es, una proposición que socava la justificación epistémica del agente. En el contexto de LP, un derrotador de  $s:A$  vendría a ser un  $p$ -polinomio que socava la relación de justificación entre  $s$  y  $A$ . Los axiomas LP3 expresan, precisamente, que no hay tales derrotadores. Se puede entender que el axioma de introspección positiva LP2 afirma que las justificaciones son comprobables: si  $t$  es una justificación de  $A$ , entonces se puede construir una justificación de  $t:A$  aplicando la operación de inspección a  $t$ . El axioma de facticidad LP4 resulta problemático, si se acepta que el agente pueda justificar creencias falsas. No obstante, puede encontrarse una motivación para LP4 en la teoría externalista y causal de la justificación epistémica. De acuerdo con esta, una creencia verdadera que  $A$  constituye conocimiento, si la verdad de  $A$  causa la creencia que  $A$ . Bajo esta interpretación externalista de la justificación, una expresión como  $t:A$  significaría “ $A$  es conocido en virtud de (la razón)  $t$ ”.

La lógica epistémica con justificaciones de Artemov y Nogina agrega un operador unario **K** de conocimiento implícito al lenguaje de LP. En consecuencia, se debe agregar **KA** al conjunto de fórmulas.

**Definición 03:** El sistema de axiomas S4LP para la lógica epistémica con justificaciones consta de los siguientes axiomas y reglas:

Todos los axiomas de LP.

E1  $\mathbf{K}(A \rightarrow B) \rightarrow (\mathbf{K}A \rightarrow \mathbf{K}B)$

E2  $\mathbf{K}A \rightarrow \mathbf{K}\mathbf{K}A$

E3  $\mathbf{K}A \rightarrow A$

R1  $\vdash A$  junto con  $\vdash A \rightarrow B$  implica  $\vdash B$  (modus ponens)

R3  $\vdash A$  implica  $\vdash \mathbf{K}A$

R4  $\vdash c:A$ , si  $A$  es un axioma de LP0–LP4 o E1–E3, y  $c$  es una  $p$ -constante.

C1  $t:A \rightarrow \mathbf{K}A$ .

Bajo la lectura epistémica de  $t:A$ , el axioma de interacción C1 tiene reminiscencias de la idea de que el conocimiento explícito implica el conocimiento implícito. Otro axioma de interacción que puede tenerse en cuenta sería: C2:  $\neg t:A \rightarrow \mathbf{K}\neg t:A$ . Con este axioma de introspección negativa explícita se puede demostrar la 'decidibilidad de la evidencia', esto es,  $\vdash \mathbf{K}t:Av\mathbf{K}\neg t:A$ . El sistema S4LPN resulta de agregar el axioma C2 a S4LP.

La lógica de la justificación debe hacer una consideración especial de lo que denominamos p-constantes. Así, en este caso, tenemos que se denomina CS a una especificación de constantes tal que  $CS = \{c_1:A_1, c_2:A_2, \dots\}$ , siendo cada  $A_i$  un axioma de S4LPN y cada  $c_i$  una p-constante. Asimismo, se dice que S4LPNCS es el subsistema obtenido a partir de S4LPN, cuando se restringe la regla R4 a las fórmulas de CS.

## 5. Descripción de un escenario epistémico y esbozo de una solución

En el ejemplo que venimos considerando sobre la verdad de la oración de Gödel, la descripción de este escenario, de hecho, va a ser incompleta, porque sucede, por ejemplo, que no se va a especificar si  $a_1$  realmente ignora  $t:S$  desde un inicio, sino que quedará revelado recién cuando manifieste su razón para sostener 'G es verdadera'. Hay más cosas que no se especifican, como lo que  $a_2$  sabe respecto a lo que sabe  $a_1$ . De hecho, sucede también que se da la asimetría mencionada, en tanto no tiene la misma profundidad el conocimiento de  $a_1$  y  $a_2$ . No puede asumirse tampoco un conocimiento común del modelo, en virtud de esta asimetría.

El punto que nos abocamos a tratar en este trabajo tiene que ver entonces con la descripción de un escenario epistémico para el caso en que queremos considerar la ignorancia inducida o una situación de este tipo, por lo que resulta al fin ser muy análogo a los escenarios que motivan la consideración de una lógica epistémica sintáctica, por parte de S. Artemov. Siendo que en este trabajo sólo pretendemos dar una primera aproximación al problema, nos limitaremos a señalar primero varios aspectos que vinculan una cuestión con la otra y a partir de ahí, las ventajas que parece tener un enfoque de este tipo también en la consideración formal de esta clase de ignorancia. Dejamos para un trabajo ulterior, un desarrollo más formal de la cuestión y del ejemplo considerado aquí y su resolución. El punto fundamental, por consiguiente, es que la descripción de estos escenarios epistémicos es por lo general incompleta. Siempre tendremos aspectos que no quedan especificados desde el inicio y que no permiten contar en un comienzo con un modelo único que represente el escenario con todo lo que las agentes saben o no saben. Inducir la ignorancia parte, precisamente, del hecho de que hay que determinar la ignorancia, lo cual, por lo general y con más precisión no está dado de antemano.

Sólo a modo ilustrativo, entonces, haremos algunas consideraciones en torno a la consideración formal del ejemplo que nos ocupó hasta ahora. Ante todo, resulta conveniente adoptar a nuestros fines, luego de la breve presentación anterior, el sistema S4LPN, en el que podremos reproducir las inferencias epistémicas que realiza una agente, como la del ejemplo de Ann y Bob. Esta lógica servirá de complemento, a su vez, de la teoría deductiva para  $\Gamma$ , que asumamos junto a S4LPN, lo que nos permitirá inferir a partir del conjunto  $\Gamma$ , lo que se sigue del escenario epistémico allí expuesto.

Aceptando que ahora referimos numéricamente a los agentes, de hecho, una agente, Ann ( $a_2$ ), tiene más conocimiento que el otro, Bob ( $a_1$ ), sobre lo que pasa en el modelo:  $\mathbf{K}_2 t:S \vee \mathbf{K}_2 \neg t:S$ , pero no es el caso,  $\mathbf{K}_1 t:S \vee \mathbf{K}_1 \neg t:S$ . Asimismo, no queda especificado si se da el hecho que  $\mathbf{K}_1 t:S$ , hasta que esta información es proporcionada (aunque fuese indirectamente) por  $a_2$ . Lo que  $a_1$  debe hacer entonces es alcanzar una solución deductiva, razonando no sobre el modelo, sino sobre qué se sigue de la descripción sintáctica  $\Gamma$  de la situación epistémica. Este razonamiento podría ser algo como lo siguiente (informalmente expresado):

Después de que  $a_1$  toma conciencia que  $\neg s:S$ ,  $a_1$  ignora la justificación de  $S$  y por lo tanto,  $a_1$  no sabe  $S$ . Esto resulta por la introspección negativa.<sup>14</sup>

Por su parte, además de por el gesto de  $a_2$  (supongamos a Ann como la profesora de lógica, que lo observa), luego de su primera aseveración anterior y después que  $a_2$  anuncia  $r:S \vee t:S$ ,  $a_1$  ahora debería ya ‘suspender el juicio’ sobre  $S$ .

Lo destacable en cuanto a lo útil en este enfoque, es cómo se puede representar ahora el razonamiento sobre lo que ignora el agente y cómo se reconstruye su razonamiento en esta situación, en una lógica aplicada a tal efecto.

Finalmente, destaquemos cómo resulta representada la ignorancia del agente en este caso, como resultado de la inferencia a partir de la descripción sintáctica  $\Gamma$  del escenario. ‘El agente  $i$  no sabe  $S$ ’ se representa como  $\Gamma \not\vdash \mathbf{K}_i S$ , en vez de representarse con la inferencia  $\Gamma \vdash \neg \mathbf{K}_i S$ .

Resulta, que es que mucho más apropiado formalizar esto así en una situación de cambio dinámico de los datos: esto es, llegar a que ‘ $i$  no tiene aún suficientes datos para concluir  $F$ ’ ( $\Gamma \not\vdash \mathbf{K}_i F$ ) en lugar de decir que ‘ $i$  sabe que no sabe y nunca sabrá  $F$ ’ ( $\Gamma \vdash \neg \mathbf{K}_i F$ ). Esta distinción permite evitar la no-monotonidad y la revisión del conocimiento durante las actualizaciones de información (‘updates’), a lo que antes ya hicimos referencia. A su vez, expresa bastante bien

---

<sup>14</sup> Aceptamos, implícitamente, que para conocer  $p$  debe contarse con una justificación aceptada o que produzca conocimiento. Algo que, en el ejemplo, Ann puede determinar en  $\Gamma$  y anunciárselo a Bob.

la situación de ignorancia y cómo puede el agente ir adquiriendo los datos que nos lleven a concluir que está en posición de saber algo.

## 6. Ignorancia inducida y educación

En “Educating for ignorance”, Pritchard y Peels se ocupan de destacar el valor de “cultivar deliberadamente la ignorancia como una práctica educacional *bona fide*”. En diferentes ocasiones, como señalan estos autores, los educadores deberían presentar a los estudiantes desafíos, que dan por tierra con sus conocimientos, de modo que son conducidos a una ‘falta de conocimiento al menos temporalmente’. También encontramos en la educación el fenómeno del ‘andamiaje’ (*skafoolding*), que implica que el educador se asegure muchas veces de que el estudiante ignore cierto tipo de información. En otros casos, como el ejemplo que hemos considerado, si la ignorancia es ausencia de una creencia verdadera, como sostienen algunos autores, entonces en dichos casos en los que un estudiante cree algo verdaderamente sin saberlo y los profesores muestran su falta de conocimiento, los estudiantes pueden abandonar esta creencia y de ese modo ignoran algo. Entendida de este modo, para los autores mencionados, la ignorancia ‘está al servicio de fines epistémicos específicamente positivos’.<sup>15</sup>

Siempre se trata en este marco de la llamada ‘ignorancia proposicional’. Se entiende, que la ignorancia consiste o bien en la falta de conocimiento o la carencia de una creencia verdadera en la proposición que se toma como objetivo. Aunque esta forma disyuntiva permite acomodar ambas propuestas fundamentales en la literatura sobre el tema, nos hemos inclinado aquí por la ignorancia entendida como falta de conocimiento, esto es, por la visión considerada estándar. De todos modos, los dos puntos de vista son compatibles con este abordaje.

Asimismo, dos formas de ignorancia relevantes en el contexto en que nos ubicamos son la denominada ‘ignorancia por descreimiento’, en la cual se deja de creer activamente en la proposición verdadera, que se da como objetivo y la llamada ‘ignorancia suspensiva’, en la que se suspende el juicio sobre la proposición verdadera tomada como objetivo, que de este modo no se cree ni se deja de creer. En el ejemplo anterior, que nos ocupó como caso central, resulta más atendible la ignorancia de esta última clase, ya que la ‘derrota’ sobre las creencias del agente conduce a esta suspensión del juicio. Característico en estos casos es que, aunque haya ignorancia, se es consciente de la proposición que constituye el objeto del conocimiento. Hay casos entre la variedad de formas de ignorancia en los cuales incluso esto falta, entre ellos los llamados ‘ignorancia profunda’ y también el denominado ‘ignorancia completa’. Quizás lo más destacable entre los logros de los enfoques actuales en torno al estudio

---

<sup>15</sup> Cfr. Peels, R. & Pritchard, D. (2021).

formal de la ignorancia, es este reconocimiento de una variedad multiforme de casos de ignorancia, frente a un panorama menos diverso en los estudios anteriores.

También, de hecho, nos encontramos con niveles de ignorancia en forma análoga a que tenemos niveles de conocimiento. Así, se puede ignorar algo e ignorar que se lo ignora y así sucesivamente.

En los casos que consideramos, los agentes son conscientes del ‘derrotador’ presentado y por ello tienden a ser también conscientes de su ignorancia provocada por el mismo. Esto es algo que permite incorporar en la formalización el uso de la lógica de la justificación epistémica. Lo que en este trabajo tratamos de remarcar es que la formalización del razonamiento involucrado se ve mejor reflejada en el enfoque desde una aplicación de esta lógica, antes que mediante el uso de modelos modales epistémicos con este propósito.

## 7. Conclusiones

En base a los escenarios considerados y sus modelos epistémicos, ¿qué condiciones se desprenderían respecto a la formalización de lo que llamamos ‘ignorancia inducida’, bajo este análisis?

Al menos parece que esto requiere, en el escenario epistémico, alguna de las siguientes condiciones:

- 1- Se cree  $S$ , pero sin una justificación aceptada;
- 2- Se es consciente que  $S$  es el caso (se cree  $S$ ) y se cuenta con una justificación aceptada;
- 3- Mientras no se cuente con una justificación, que produce conocimiento.

Claramente, resulta que en el escenario con 1 podría ser inducida la ignorancia. Con 2 y 3 parece menos abierta esa vía. De este modo, encontramos claramente que la formalización requiere, de todos modos, incorporar justificaciones a la lógica epistémica.

Un aspecto a explorar es la posibilidad de expandir una lógica de la justificación (LJ) mediante el agregado de ‘acciones’ para ‘cuestionar justificaciones’. En este trabajo referimos, aunque sólo incidentalmente, al *anuncio*, sea público o privado de una agente, por ejemplo. Asimismo, parece viable agregar al lenguaje ‘comparaciones epistémicas’ entre individuos o grupos, como ‘uno sabe más que otro’. Baltag & Smets, al respecto señalan:

“Standard temporal-epistemic logics and dynamic approaches e-g PAL and DEL can do this; but only by always making explicit the specific sentences that are being communicated. This is not always convenient.”<sup>16</sup>

La manera de hacerlo dentro de un enfoque sintáctico de la lógica epistémica - como el considerado- está abierta para otras investigaciones en esta línea. Tales como formular las condiciones generales para una teoría epistémica, como descripción axiomática de un escenario dado, a partir de una descripción verbal de una situación.

Finalmente, cabe indicar algunos posibles ámbitos de estudio y aplicación del enfoque considerado. Al respecto, se plantean posibilidades a explorar en cuanto a la capacidad de inducir ignorancia y guiar un proceso de ‘identificación de nuevas bases epistémicas’, mediante el aporte de información textual, orientada sobre la variedad de justificaciones y la toma de consciencia (*awareness*), por parte de los agentes, ajustando las dimensiones ‘inferenciales’ del modelo epistémico. Un ámbito más específico de aplicación se halla en concreto mediante las posibilidades abiertas por los modelos grandes de lenguaje, a través del manejo de textos y sus capacidades de evaluación, en base al procesamiento cualitativo de las respuestas producidas.

## Bibliografía

- Artemov, S. (2020). Observable models. En S. Artemov & A. Nerode (Eds.), *LFCS 2020* (LNCS 11972, pp. 12–26). Springer Nature.
- Artemov, S. (2022). Towards syntactic epistemic logic. *Fundamenta Informaticae*, 186(1–4), 45–62.
- Artemov, S., & Nogina, E. (2005). Introducing justification into epistemic logic. *Journal of Logic and Computation*, 15(6), 1059–1073.
- Baltag, A., & Smets, S. (2024). Learning what others know. En E. Albert & L. Kovács (Eds.), *LPAR23 (EPIc Series in Computing, 73)*, pp. 90–119).
- Peels, R. (2023). *Ignorance: A philosophical study*. Oxford University Press.
- Peels, R., & Pritchard, D. (2021). Educating for ignorance. *Synthese*, 198, 7949–7963.
- Serény, G. (2011). How do we know that the Gödel sentence of a consistent theory is true? *Philosophia Mathematica*, 19, 47–73.

---

<sup>16</sup> Baltag, A. & Smets, S. (2024).

# F-systems. Abordando paradojas y confrontaciones políticas

Gustavo Bodanza

Departamento de Humanidades, Universidad Nacional del Sur, Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales del Sur (UNS-CONICET). Bahía Blanca, Argentina.

[gbodanza@iieess-conicet.gob.ar](mailto:gbodanza@iieess-conicet.gob.ar)

Los F-systems son sistemas que permiten representar paradojas semánticas y establecer condiciones para su ocurrencia/no ocurrencia. Básicamente, se trata de un conjunto  $S$  de oraciones que expresan la falsedad de otras oraciones a través de una relación binaria  $F$ . Así, se puede representar la paradoja del mentiroso, la de Yablo, etc. Los "conglomerados locales" de un F-system son subconjuntos de sentencias que se pueden tomar conjuntamente como verdaderas, dejando afuera otras que son falsas o paradójicas. Aquí propongo utilizar estos sistemas para modelar la interacción entre grupos o facciones políticas ( $S$ ), de modo de poder representar fenómenos como la polarización (conglomerados locales opuestos) o la aparición de grupos disruptivos (excluidos de todo conglomerado).

**Palabras clave** | F-systems; paradojas semánticas; fuerzas políticas; polarización

## 1. Introducción

Algunas paradojas semánticas, como la del mentiroso o la de Yablo, involucran oraciones que afirman la falsedad de otras oraciones. Las oraciones como la del mentiroso, como "Esta oración es falsa", son claramente autorreferenciales y, por lo tanto, circulares. Por otro lado, S. Yablo (1993) introdujo un problema, que consiste en una serie infinita de oraciones, cada una de las cuales afirma la falsedad de todas las siguientes, para mostrar que se puede obtener una paradoja sin autorreferencia ni circularidad. Sin embargo, ¿existe alguna causa común detrás de estas paradojas? ¿Qué condiciones son suficientes para producirlas? Un buen primer paso para intentar responder a estas preguntas es encontrar un marco común que las represente. A primera vista, lo único que tenemos son oraciones que afirman la falsedad de otras oraciones (quizás de ellas mismas); por lo tanto, el enfoque puede comenzar considerando simplemente un conjunto de oraciones y una relación según la cual algunas de esas oraciones afirman la falsedad de otras. Siguiendo esta motivación, Cook (2004) introdujo la novedad de utilizar herramientas de teoría de grafos para tratar con paradojas semánticas que involucran un predicado de falsedad. Rabern, Rabern y Macauley (2013) acuñaron el término *F-systems* para referirse a "sistemas de oraciones que están restringidos de tal manera que todas las oraciones solo pueden decir que otras oraciones en el sistema son falsas."

Los *F-systems* definen digrafos, esto es, grafos cuyos arcos o aristas tienen dirección y se grafican como flechas. Cada nodo del grafo representa una oración, y cada flecha entre un nodo y otro representa la referencia que hace la oración del primer nodo a la del segundo como una oración falsa. Al utilizar estos sistemas para estudiar las paradojas podemos encontrar propiedades de los sistemas de oraciones paradójicos a través de propiedades grafo-teóricas. En un trabajo previo (Bodanza, 2023) introdujimos la noción de *conglomerado*, que define un conjunto de nodos de un digrafo que cumple determinadas propiedades, y mostramos que lo que caracteriza a un sistema de oraciones paradójico es no poseer ningún conglomerado (o, contrapositivamente, si hay algún conglomerado en el sistema, entonces no hay paradoja).

Ahora bien, los *F-systems* también pueden utilizarse para modelar otros tipos de sistemas. Por ejemplo, Dyrkolbotn (2012) muestra que los sistemas de argumentación abstracta de Dung (1995) son casos particulares de *F-systems*. Aquí los nodos representan argumentos y las flechas representan una relación de ataque entre argumentos. A través de propiedades del grafo se pueden establecer distintas semánticas de extensiones, o sea, criterios que determinan qué subconjuntos de argumentos pueden darse por justificados o ganadores. En este trabajo vamos a mostrar otra posible aplicación, que es la de modelar la interacción entre fuerzas políticas para dar cuenta tanto de situaciones de equilibrio y polarización como de aparición de fuerzas disruptivas. La teoría de

grafos ya ha sido utilizada desde hace bastante para el modelado de relaciones tanto positivas (afecto, amistad, etc.) como negativas (rechazo, enemistad, etc.) entre agentes sociales (e.g., Cartwright y Harary, 1956). El aporte de nuestro enfoque es el de un tratamiento más simple, aunque más restringido (ya que no permite representar relaciones positivas). Los nodos de un F-system representarán fuerzas políticas con posibilidades de poder, mientras las flechas representarán con cuál otra fuerza buscan confrontar. Cuando todas las fuerzas se ubiquen dentro de un conglomerado habrá una situación de balance de fuerzas. Cuando ese balance se distribuya en sólo dos conglomerados habrá una polarización. Los conglomerados también permitirán identificar (por exclusión) fuerzas disruptivas que buscan confrontar con fuerzas balanceadas en busca de un nuevo equilibrio que las ubiquen en un conglomerado. El fin del modelo no será identificar cuál será la fuerza dominante, sino cuáles serán los equilibrios posibles. En apoyo a nuestra propuesta, argumentaremos que el enfoque se adecúa a ciertas observaciones teóricas de las ciencias políticas sobre la polarización.

## 2. F-systems. Definiciones

Un *F-system* es una estructura  $\langle S, F \rangle$ , donde  $S$  es un conjunto de elementos y  $F$  es una relación  $F \subseteq S \times S$ . Se puede ver un F-system como un digrafo donde  $S$  es un conjunto de nodos y  $F$  es un conjunto de flechas que conectan nodos. Canónicamente, un F-system representa con  $S$  un conjunto de oraciones y con  $F$  una relación según la cual unas oraciones se refieren a otras como falsas, es decir,  $(x, y) \in F$  se interpreta como ‘ $x$  dice que  $y$  es falsa’.

Veamos algunos ejemplos.

1) La paradoja del mentiroso se puede entender como una oración que dice de sí misma que es falsa. Sea  $a$  tal oración. Entonces, la paradoja puede ser modelada con el F-system  $\langle \{a\}, \{(a, a)\} \rangle$ .

2) También podemos modelar sistemas no paradójicos. Por ejemplo, si tenemos las oraciones:

$a$ : la nieve es blanca

$b$ : la oración ‘la nieve es blanca’ es falsa

podemos representar esto con el F-system  $\langle \{a, b\}, \{(b, a)\} \rangle$ .

3) También pueden representarse casos en los que una misma oración hace referencia a más de una oración. Por ejemplo,  $a$  dice que  $b$  y  $c$  son falsas:  $\langle \{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c)\} \rangle$ . Sin embargo, no podemos

representar otras posibilidades lógicas como, por ejemplo,  $a$  dice que  $b$  ó  $c$  son falsas,  $a$  dice que  $b$  no es falsa, etc.

Introducimos ahora los siguientes operadores que nos ayudarán a definir las próximas nociones. Sea  $\langle S, F \rangle$  un F-system genérico y sea  $A \subseteq S$ . Entonces:

- $F^{\rightarrow}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in S: \text{existe } y \in A \text{ tal que } (y, x) \in F\}$  (i.e., el conjunto de todo lo que desde  $A$  se señala como falso)
- $F^{\leftarrow}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in S: \text{existe } y \in A \text{ tal que } (x, y) \in F\}$  (i.e., el conjunto de todo lo que señala a oraciones de  $A$  como falsas)
- Si  $x \in S$  es tal que para todo  $y \in S$ ,  $(x, y) \notin F$ , entonces decimos que  $x$  es *terminal*. Definimos  $Term(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A: x \text{ es terminal}\}$ .

### 3. Caracterizando paradojas semánticas

Es característico de una paradoja semántica que a algunas oraciones que la componen no se les puede atribuir un valor de verdad clásico, i.e., verdadero o falso. Es fácil corroborarlo en la paradoja del mentiroso: si a la oración en cuestión la suponemos verdadera, inferimos que debe ser falsa dado lo que la propia oración dice; y si suponemos que es falsa, inferimos que debe ser verdadera dado lo que la propia oración dice. Pero esto conlleva contradicción. Por lo tanto, la oración en cuestión ni es verdadera ni es falsa.

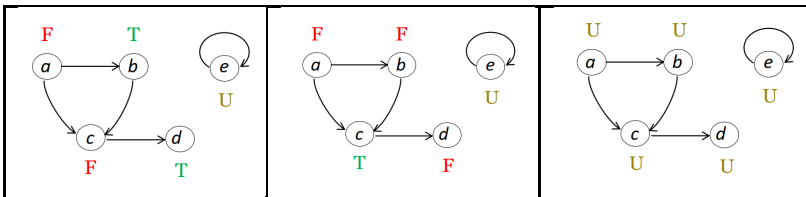


Figura 1

Desde el punto de vista de la lógica clásica, una oración  $x$  que refiere la falsedad de otras oraciones  $z_1, \dots, z_n$  (y no a otra cosa) será falsa si, y sólo si, alguna oración  $z_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) es verdadera; y será verdadera si, y sólo si, toda oración  $z_i$  es falsa. En una paradoja semántica tenemos oraciones cuyo valor queda indeterminado, ya que no se les puede atribuir un valor de verdad de acuerdo a tal criterio. Podemos ver gráficamente cómo asignar valores de este modo mediante un *etiquetado completo* (Caminada, 2006) del digrafo, donde aplicamos etiquetas T, F y U a los nodos, representando los valores verdadero (*True*), falso (*False*) e indeterminado (*Undetermined*), respectivamente. Digamos que la etiqueta U puede ser asignada a cualquier nodo, mientras T y F pueden ser

asignadas sólo de acuerdo al criterio de arriba. Además, no hay restricciones para etiquetar nodos terminales (éstos representan oraciones del lenguaje objeto cuyo valor de verdad se determina de manera externa al sistema). En la Figura 1 vemos un mismo F-system con tres etiquetados completos posibles. En todos ellos, el nodo  $e$  no puede recibir otra etiqueta que no sea U. Ese nodo representa una oración paradójica. Los otros nodos representan oraciones no paradójicas, y todos ellos pueden ser etiquetados con alguna etiqueta “clásica”, T ó F (además de U).

Esto nos muestra que en este F-system tenemos dos subconjuntos de nodos máximos a los que se puede asignar la etiqueta T (según las condiciones dichas), a saber,  $\{b, d\}$  y  $\{c\}$ . Es decir, podemos tomar como verdaderas *a la vez* a las oraciones representadas por  $b$  y  $c$ , por un lado, o bien sólo a  $c$ , por otro.

Ahora nos preguntamos si podemos encontrar algunas propiedades comunes para caracterizar lo que ocurre en estos casos, pero sin apelar a etiquetados, sino simplemente a cuestiones grafo-teóricas. Las siguientes nociones, que introdujimos en Bodanza (2023), cumplen con ese propósito. Dado un F-system  $\langle S, F \rangle$ , decimos que un subconjunto  $A \subseteq S$  es un *conglomerado* si, y sólo si, se cumplen las siguientes propiedades:

$$(1) F^{\leftarrow}(A) \subseteq S \setminus A,^1$$

$$(2) (S \setminus A) \setminus Term(S) \subseteq F^{\leftarrow}(A).$$

La primera condición dice que  $A$  es “independiente” (i.e., todas las oraciones que señalan a oraciones de  $A$  como falsas quedan excluidas de  $A$ ; o, dicho de otro modo, no hay flechas dentro de  $A$ ). Intuición: oraciones verdaderas no pueden predicar la falsedad de otras oraciones verdaderas. La segunda condición dice que  $A$  es “absorbente”, significando que cualquier oración no terminal excluida del conjunto señala como falsa a alguna oración de dentro del conjunto. Intuición: oraciones falsas en nodos no terminales sólo pueden predicar falsedad de oraciones verdaderas (de otro modo, serían verdaderas). Simplificando: todo lo que señala hacia  $A$  queda fuera de  $A$ , y todo que está fuera de  $A$  señala hacia  $A$ . Así, un conglomerado contiene oraciones que pueden ser todas verdaderas a la vez, mientras excluye oraciones que pueden ser todas falsas, todo al mismo tiempo. O sea, establece una partición, separando lo verdadero de lo falso. En el ejemplo de la Figura 1 no tenemos ningún conglomerado. Esto ocurre justamente porque el sistema es paradójico: la oración del nodo  $e$  no puede clasificarse ni como verdadera ni como falsa.

Así, tenemos un resultado general:  $A$  es un conglomerado si, y sólo si, existe un etiquetado clásico  $E$  tal que  $A = \{x \in S: E \text{ asigna la etiqueta T a } x\}$ , donde por

---

<sup>1</sup> El operador  $\setminus$  es la diferencia entre conjuntos.

‘etiquetado clásico’ entendemos un etiquetado completo que a cada nodo le asigna una de las etiquetas T ó F. Si entendemos que una oración paradójica es tal que todo etiquetado completo puede asignarle *sólo* la etiqueta U, entonces tenemos como corolario que hay paradoja si, y sólo si, no hay conglomerados.

Por otra parte, en algunos F-systems podemos separar partes paradójicas de otras no paradójicas, como en el caso de la Figura 1. Allí podríamos aislar la paradoja *e* y capturar todas las oraciones que pueden ser tomadas conjuntamente como verdaderas. Esto podemos hacerlo con una versión *local* de conglomerado, que obtenemos sustituyendo la condición (2) por la siguiente:

$$(2') F^{\rightarrow}(A) \setminus Term(S) \subseteq F^{\leftarrow}(A).$$

De este modo, se requiere que la absorción capte aquello que *A* señala como falso, sin importar lo que no es señalado por *A*. En el F-system de la Figura 1, podemos ver que sólo los subconjuntos  $\{b, d\}$  y  $\{c\}$  cumplen a la vez (1) y (2'). Puede verse claramente que todo conglomerado es un conglomerado local, pero no viceversa.

Los conglomerados locales también permiten identificar oraciones contradictorias, como *a*. Cuando *b* y *c* tengan un valor clásico, *a* sólo podrá ser falsa, dado que o bien *b* o bien *c* será verdadera, y *a* afirma que ambas son falsas. Llamamos a ésta *contradicción referencial*. Las contradicciones referenciales, en consecuencia, siempre quedarán fuera de cualquier conglomerado local (y, por ende, de cualquier conglomerado).

#### 4. Conglomerados y fuerzas políticas

Los F-systems, además de tener aplicaciones en la lógica y en la argumentación, también tienen otras potenciales aplicaciones. Relaciones como la predicación de falsedad de una oración a otra, o de ataque de un argumento a otro, pueden tener propiedades comunes con otros tipos de negación, rechazo, ataque, aversión, repulsión, etc., en distintos dominios. Nuestra idea es que algunas de esas propiedades comunes pueden ser capturadas con las nociones de conglomerado y conglomerado local. En particular, vamos a proponer su aplicación al estudio de la interacción entre fuerzas políticas, con la intención de modelar situaciones de equilibrio y polarización, así como la aparición de fuerzas disruptivas.

Pensemos en fuerzas políticas de un país u otra institución, con cierta capacidad de acceso al poder.<sup>2</sup> Los nodos de nuestro F-system representarán

---

<sup>2</sup> No consideramos, por ejemplo, pequeños grupos poco representativos en una democracia. La dinámica de cómo un grupo político llega a ser una fuerza capaz de acceder al poder queda fuera de los alcances de este modelo.

estas fuerzas. Para acceder al poder, las fuerzas políticas pueden oponerse o no a otras, generando confrontaciones o posibles coaliciones. La relación  $F$  representará la relación de confrontación. Si no hay confrontación entre ellas será posible una coalición. Notemos que una fuerza puede buscar confrontar con otra (por ejemplo, señalándola como lo negativo, erróneo, perjudicial o enemiga de la sociedad, en oposición a la propia fuerza -lo correcto, positivo o beneficioso), sin que necesariamente la segunda responda de la misma manera (por ejemplo, asumiendo una estrategia dialoguista o tolerante). Nuestro modelo no busca determinar qué fuerza se impondrá, sino cuáles serán situaciones de equilibrio o no entre ellas. Por ejemplo, en un escenario de polarización entre dos fuerzas donde una de ellas ejerce el poder y la otra ejerce la oposición, el equilibrio puede mantenerse aun cuando el poder cambie de mano (por caso, como resultado de una elección democrática).

Vamos a definir la idea de equilibrio. Decimos que un  $F$ -system  $\langle S, F \rangle$  está *balanceado* si, y sólo si,  $S$  puede ser particionado en conglomerados locales.<sup>3</sup> Es decir, existe una clase  $\{P_1, \dots, P_n\}$  de subconjuntos de  $S$  tal que:

- (1) cada  $P_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) es un conglomerado local,
- (2)  $P_1 \cup \dots \cup P_n = S$ .

Si  $n = 2$ , entonces decimos que el sistema está *polarizado* (o sea, está polarizado si el balance se da por el equilibrio entre dos fuerzas).<sup>4</sup>

En la Figura 2 podemos ver tres  $F$ -systems. El (i) no está balanceado, ya que  $a$  no pertenece a ningún conglomerado. Los dos restantes están balanceados, ya que cada nodo pertenece a algún conglomerado. El (iii), además, está polarizado, ya que todos los nodos se dividen en dos conglomerados antagónicos.

---

<sup>3</sup> Si la relación  $F$  no contiene ciclos de longitud impar, se pueden considerar conglomerados en general, ya que en tal contexto la existencia de conglomerados está garantizada (Bodanza, 2023).

<sup>4</sup> La intuición es similar a la idea de balance en grupos sociales definida por Cartwright y Harary (1956) y redefinida posteriormente por otros autores, aunque con otro tipo de modelos. Básicamente, el balance en un grupo social es entendido como una partición del grupo en dos o más clusters o subgrupos mutuamente antagónicos.

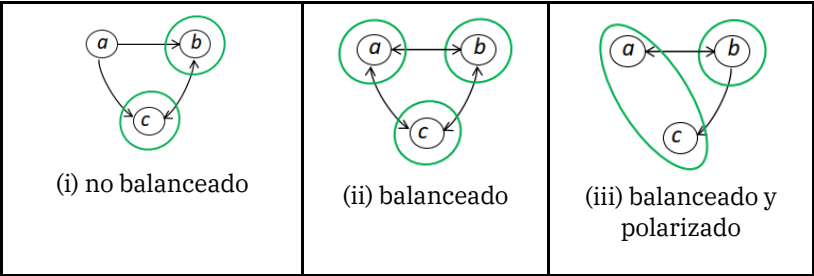


Figura 2

Es interesante ver lo que ocurre en (i). Nótese que, bajo la interpretación canónica de oraciones interactuando por medio de un predicado de falsedad, *a* constituye una contradicción referencial, lo que puede entenderse como un desacuerdo esencial con la dicotomía entre la verdad de *b* y la verdad de *c*, que deja a *a* siempre fuera de la verdad. En términos de fuerzas políticas, por su parte, podría entenderse como un desacuerdo esencial con la dicotomía entre dos fuerzas polarizadas, representando una fuerza política disruptiva que a través de la confrontación con las otras dos busca romper ese equilibrio. Esto es razonable desde un punto de vista estratégico, ya que cambiar la relación entre fuerzas es necesario para lograr otro equilibrio que la incluya. ¿Cómo podría darse ese cambio? Una posibilidad es que *a* logre captar (“absorber”) el rechazo de las otras fuerzas. Esto reforzaría la situación de *a* frente a la sociedad, logrando un nuevo balance que lo incluye como tercera fuerza (ii). Otra posibilidad es llegar a la situación (iii), donde *a* logra el rechazo de sólo una de las fuerzas polarizadas (*b*). Aquí, si *c* evita confrontar con *a* y logra su aceptación, pueden crear una coalición (conglomerado) para polarizar con *b* en un nuevo equilibrio. Por supuesto, existen otras posibilidades, pero lo visto es suficiente para ilustrar el potencial representativo del modelo en el análisis de fuerzas sociales.

## 5. Comentarios finales

Los F-systems son lo suficientemente generales como para modelar una diversidad de dominios en los que un conjunto de entidades se hallan relacionadas por alguna forma de negatividad o rechazo. Aquí hemos expuesto, en primer lugar, la aplicación al estudio de paradojas semánticas que involucran un predicado de falsedad, para lo cual las nociones de conglomerado y conglomerado local nos proporcionan una herramienta para identificar y aislar dichas paradojas. En segundo lugar, mostramos como novedad la aplicación para el estudio de equilibrios de fuerzas políticas, donde las mismas nociones nos permitieron elaborar los conceptos de balance y polarización, e identificar fuerzas disruptivas.

En comparación con otros modelos conocidos para el análisis del balance social, principalmente con el de grafos signados (*signed graphs*) (Cartwright y Harary, 1956; Davis, 1967), que contempla tanto una relación negativa como otra positiva, el presente modelo es más simple en cuanto se pueden capturar ideas similares de balance con sólo una relación negativa.<sup>5</sup> Además, el modelo parece capturar intuiciones politológicas acerca de la polarización. Por ejemplo, la propiedad de “absorción”, interpretada como la capacidad de generar la reacción de la fuerza a la que se rechaza, se refleja en este pasaje de Jennifer McCoy (2019) sobre la polarización:

En primer lugar, a menudo este fenómeno es estimulado por la retórica de los líderes políticos, que explotan agravios reales de los votantes. (...) [L]a polarización trabaja en dos sentidos. *Cómo reacciona la oposición política es el segundo factor que explica el impacto de la polarización en la democracia.* Si, ante la retórica de resentimiento y las tácticas que pretenden excluir al perdedor, la oposición responde con un lenguaje político agresivo y demonizador similar, se arriesga a consolidar un ciclo que conduzca a un atrincheramiento en la política de polarización. (Itálicas nuestras.)

Los F-systems, al ser grafos dirigidos, permiten representar el hecho de que una fuerza puede buscar la confrontación con otra sin que el ataque sea necesariamente correspondido. El segundo factor de la polarización que menciona McCoy puede darse o no, con lo cual la polarización ocurrirá o no. La relación negativa en los grafos signados, en cambio, al ser simétrica, supone de por sí el rechazo mutuo. Además de la simpleza, entonces, también los F-systems presentan ventajas representacionales con respecto a los grafos signados, al menos para este tipo de interacciones. Por otra parte, los F-systems no permiten ver qué ocurre con la dinámica por la cual los individuos se agrupan en fuerzas políticas, para lo cual los grafos signados suponen un buen modelo (e.g., Heider, 1958).

Así como puede metrizar el grado de desbalance de un grafo signado definiendo alguna noción de distancia (Young Pedersen, Smets y Ågotnes, 2021), próximamente exploraremos tal posibilidad en F-systems.

---

<sup>5</sup> Beringer y Schindler (2016) amplían el modelo de F-systems para el tratamiento de paradojas añadiendo una relación positiva de afirmación de verdad. Las posibles conexiones con los grafos signados no la exploramos aquí.

## Bibliografía

- Bodanza, G. (2023) On F-Systems: A Graph-Theoretic Model for Paradoxes Involving a Falsity Predicate and Its Application to Argumentation Frameworks. *Journal of Logic, Language and Information* 32 (3), 373–393. <https://doi.org/10.1007/s10849-023-09394-1>
- Cartwright, D. & Harary, F. (1956) Structure balance: A generalization of Heider's theory. *Psychological Review* 63(5):277–293. <https://doi.org/10.1037/h0046049>
- Cook, R. T. (2004) Patterns of paradox. *The Journal of Symbolic Logic* 69(3), 767–774. DOI: 10.2178/jsl/1096901765
- Davis, J. A. (1967). Clustering and Structural Balance in Graphs. *Human Relations* 20(2), 181–187. <https://doi.org/10.1177/001872676702000206>
- Dung, P. M. (1995) On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games, *Artificial Intelligence* 77 (2), 321–357, [https://doi.org/10.1016/0004-3702\(94\)00041-X](https://doi.org/10.1016/0004-3702(94)00041-X)
- Beringer, T. & Schindler, T. (2016) Reference graphs and semantic paradox. *The Logica Yearbook 2015* (P. Arazim and M. Dancak, editors), College Publications, London, 1–15. <https://doi.org/10.1017/bsl.2017.37>
- Dyrkolbotn, S. & Walicki, M. (2014) Propositional discourse logic. *Synthese* 191, 863–899. <https://www.jstor.org/stable/24019987>
- Rabern, L. , Rabern, B., & Macauley, M. (2013) Dangerous reference graphs and semantic paradoxes. *Journal of Philosophical Logic* 42(5), 727–765. <https://www.jstor.org/stable/42001255>
- McCoy, J. (2019) La polarización perjudica a la democracia y la sociedad. *Por la paz* 36 (Diálogos en sociedades polarizadas). <https://www.icip.cat/perlapau/es/articulo/la-polarizacion-perjudica-a-la-democracia-y-la-sociedad/?pdf>
- Heider, F. (1958). *The Psychology of Interpersonal Relations*. John Wiley & Sons.
- Young Pedersen, M., Smets, S., & Ågotnes, T. (2021). Modal Logics and Group Polarization. *Journal of Logic and Computation* 31(8), 2240–2269. <https://doi.org/10.1093/logcom/exab062>

# ¿Existen principios de la racionalidad práctica? Un abordaje desde una perspectiva semántica inferencialista

Ayelen Sanchez

Departamento de Humanidades, Universidad Nacional del Sur, Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales del Sur (UNS-CONICET). Bahía Blanca, Argentina.

[ayelen.zanches@gmail.com](mailto:ayelen.zanches@gmail.com)

La racionalidad estructural, entendida como coherencia interna entre las actitudes intencionales, parece ser una de las características definitorias indiscutibles del agente racional ideal. La pregunta que motiva el presente trabajo es si este requerimiento de coherencia es un principio que posee fuerza normativa sobre los agentes racionales reales y concretos. Una serie de críticas han defendido una respuesta negativa a este interrogante, declarando que la tesis de que existen requerimientos de la racionalidad estructural es simplemente un mito. Tales críticos se basan en las dificultades que genera la formulación de los principios de la racionalidad tanto en sus versiones de alcance estrecho y alcance amplio. La hipótesis central de este trabajo es que es necesario asumir una postura sobre el contenido semántico para abordar el problema de las presiones normativas sobre los estados intencionales. En función de esta hipótesis y del análisis de las críticas mencionadas, se argumentará las ventajas que proporciona el inferencialismo normativista de la escuela de Pittsburgh a la hora de dar cuenta de las presiones normativas que genera la formación de intenciones en un agente racional.

**Palabras clave** | Racionalidad estructural; Racionalidad práctica; Normatividad; Inferencialismo

## 1. Introducción

La coherencia interna entre las actitudes intencionales es una de las características fundamentales de los agentes racionales. Esta idea no parece generar mayores problemas mientras se formule en un sentido meramente descriptivo. Bien podría considerarse a la coherencia como una nota esencial de nuestro concepto de “agente racional” o incluso como parte de la descripción de lo que podríamos considerar el agente racional ideal. Los conflictos surgen en el pasaje de la dimensión meramente descriptiva a la normativa. Es claro que esta noción de racionalidad no se agota en su pretensión de describir uno de los requisitos fundamentales para ser considerado un agente racional, sino que parece poseer algún tipo de fuerza normativa sobre los agentes humanos particulares. Esta fuerza puede apreciarse en la idea de que si bien es difícil encontrar algún individuo que ostente una coherencia perfecta de la totalidad de sus actitudes en todo momento, sí debe revisar y corregir sus actitudes en caso de detectar inconsistencias. Ahora bien, aunque esta consideración parezca muy intuitiva un análisis más detenido conduce a la pregunta sobre cuál es el fundamento de esta obligación racional de todo agente racional a mantener la coherencia entre las actitudes.

La pregunta por la fuerza normativa de los principios de la racionalidad ha motivado una actitud escéptica en la literatura filosófica. La mayoría de los involucrados en este debate coinciden en que la coherencia entre actitudes está estrechamente relacionada con la racionalidad de un agente. Pero lo que los críticos ponen en cuestión es que, incluso cuando esa coherencia sea exhibida por un agente concreto, esta sea el resultado de haberse atendido a ciertos principios de la racionalidad para formar y evaluar sus actitudes.

El presente trabajo se inscribe en el marco de este debate que gira en torno a la fuerza normativa de los principios de la racionalidad estructural y se acotará a la dimensión de la racionalidad práctica. Específicamente, el análisis se enfocará en las intenciones. Se tomará como punto de partida una consideración sobre la cual hay un acuerdo bastante extendido en la filosofía de la acción, a saber, que las intenciones no son estados mentales que ocurren individualmente de forma aislada, sino que suelen venir acompañadas por otros estados intencionales, como otras intenciones y creencias. Este no es un hecho meramente psicológico y contingente, sino que dada una intención  $\phi$  hay una serie de intenciones y creencias que están racionalmente conectados con  $\phi$ . Tales conexiones racionales determinan conjuntos de estados que necesariamente deben articularse con  $\phi$ , establecen cuáles son coherentes y cuáles incompatibles con  $\phi$ . Por ejemplo, si Juan tiene la intención de ir al cine

el sábado por la noche y tiene la creencia de que debe adquirir una entrada antes de que se agoten, entonces debe formar la intención de comprar su entrada. A su vez, debe abandonar su intención de ir a la cena a la que fue invitado ya que tendrá lugar de manera simultánea a la función del cine.

En la primera parte de este trabajo, se caracterizará a la racionalidad estructural en contraste con la denominada racionalidad sustantiva. En la segunda parte, se expondrá la forma lógica de las distintas formulaciones del principio de racionalidad estructural y se analizarán en las objeciones que han recibido cada una de ellas. Finalmente, se argumentará sobre la necesidad de asumir una postura sobre el contenido semántico para abordar el problema de las presiones normativas sobre los estados intencionales y se expondrán las ventajas que proporciona el inferencialismo normativista de la escuela de Pittsburgh a la hora de resolver estas dificultades.

## **2. Racionalidad estructural y racionalidad sustantiva**

La expresión “racionalidad estructural” (*structural rationality*) ha sido propuesta por Sacanlon (2007), aunque desde un punto de vista conceptual viene siendo tratada en la literatura desde mucho antes que reciba esta denominación. A grandes rasgos, se la puede caracterizar como un tipo de racionalidad formal en contraste con la racionalidad sustantiva (*substantive rationality*), entendida como la sensibilidad que posee el agente racional frente a las razones, es decir, frente aquellos aspectos de su situación que lo motivan y/o lo justifican a formar, revisar o descartar actitudes. Así, por ejemplo, si se afirma que la intención de Juan de comprar entradas para el cine es racional dado que tiene la intención de concurrir a ver una película el sábado por la noche, se está apelando a un sentido de “racionalidad” relativo a la racionalidad estructural. Si, en cambio, se afirma que la intención de Juan de ir al cine es racional puesto que tiene buenas razones para hacerlo, (por ejemplo, le han gustado las películas anteriores de ese mismo director o un crítico de cine cuyos criterios él respeta la ha recomendado), el sentido de “racionalidad” que está en juego aquí es el de la racionalidad sustantiva.

Resulta difícil ofrecer una descripción conceptual de la noción de racionalidad estructural sin incurrir en afirmaciones que ya implican una toma de posición en los grandes debates que se han suscitado en torno a este concepto. Teniendo en cuenta esa dificultad, la siguiente caracterización debe ser tomada como una primera aproximación y un punto de partida para luego plantear la discusión de manera más clara. Entre las características principales de la racionalidad estructural, (de ahora en adelante, RE), se encuentran las siguientes:

- a. La RE concierne a una combinación de actitudes (y/o su ausencia) y no a cada una de ellas tomadas por separado.
- b. La evaluación de la RE puede ser llevada a cabo independientemente de saber cuál/es de las actitudes del conjunto está/n avaladas por razones. En otras palabras, la evaluación de la RE es independiente de las consideraciones propias de la racionalidad sustantiva.
- c. La evaluación de la RE puede ser hecha sin tener en cuenta la situación particular del agente ni el conocimiento con el que cuenta.
- d. La evaluación de la RE es puramente formal y no apela al contenido de las actitudes evaluadas.

La RE ha sido objeto de reflexión filosófica ya desde la modernidad, pero en las últimas décadas ha recibido especial interés, por lo cual existe una extensa literatura que tematiza su naturaleza y sus relaciones con la racionalidad sustantiva. Incluso algunos autores han llegado a afirmar que la racionalidad se reduce al cumplimiento de los requerimientos de la RE sin más (Scanlon 1998; Broome 2013, 2020; Ridge 2014). Ahora bien, ¿Cuáles son los requerimientos propios de la RE? Podría decirse que el núcleo común de todas sus formulaciones consiste en la coherencia formal entre las actitudes del agente. Puesto que aquí me centraré en la racionalidad práctica, esta demanda de coherencia concierne a las intenciones entre sí y a su articulación con las creencias. Así, la RE práctica consiste en tener intenciones conjuntamente realizables y en el principio de la racionalidad instrumental (*instrumental rationality*) que requiere la formación de nuevas intenciones por parte de un agente en función de sus creencias e intenciones previas. Este principio instrumental puede expresarse del siguiente modo:

Si un agente, A, tiene una intención X ( $I_x$ ) y

A tiene una creencia, C, de que Y es un medio necesario para realizar X, entonces

A está racionalmente requerido (R) a formar la intención Y ( $R(I_y)$ )

En otras palabras, lo que prohíbe el principio de RE es la *acracia práctica* (*practical akrasia*), ya que considera una instancia de irracionalidad práctica tener una determinada intención, creer que se debe tomar un determinado curso de acción para cumplirla y, aun así, no formar la intención (o no intentar) de realizar la acción en cuestión.

Si bien la coherencia formal entre intenciones y creencias es una de las características ampliamente reconocidas como fundamentales de la agencia racional, lo que muchos autores han puesto en cuestión es que esta propiedad sea el resultado de un principio propio de la RE. En otras palabras, lo que está en discusión es la fuerza normativa misma de los principios formales de la RE. Para comprender estas críticas, será preciso analizar las distintas formulaciones del principio de RE según sea entendido como un requerimiento de alcance estrecho o amplio.

### **3. Los requerimientos de la RE como principios de alcance estrecho y el fenómeno de la autopropulsión**

Algunos de los argumentos más importantes en contra de la existencia de principios normativos que regulan la articulación de las intenciones entre sí y entre intenciones y creencias se retrotraen a la consideración sobre el alcance de estos principios. La cuestión de fondo a ser resuelta es si tales requerimientos normativos son de amplio alcance (*wide scope*) o de alcance estrecho (*narrow scope*). En esta sección se expondrán las principales dificultades que surgen de considerar a estos principios como principios de alcance estrecho.

Algunos autores afirman que el requerimiento de RE que demanda una coherencia formal entre los estados intencionales de un agente debe ser entendido como un principio de alcance estrecho (Schroeder, 2004; Korsgaard, 1997). Según esta formulación, el requerimiento es condicional a uno o más estados intencionales que funcionan como antecedentes. En el caso puntual de las intenciones, si un agente A forma una intención X y cree que Y es un medio necesario para realizar X (C), entonces el requerimiento de RE (R) demanda que forme la intención de realizar Y:

$$(I_X) \wedge C \rightarrow R(I_Y)$$

Una dificultad que amenaza a toda propuesta que considere los principios de la RE como principios de alcance estrecho es la de dar lugar al fenómeno de la autopropulsión (*bootstrapping*) (Broome, 2001). El problema puede generalizarse en los siguientes términos: un agente que forma la intención X ( $I_X$ ) y tiene la creencia C, pasa a tener una razón para formar una intención Y ( $I_Y$ ). El fenómeno de la autopropulsión se da por el surgimiento repentino de una razón por el solo hecho de que un agente ha formado una determinada intención, razón que no existía previamente a la formación de esa intención.

En el siguiente ejemplo puede apreciarse el conflicto que supone el fenómeno del empuje. José desea aumentar su calidad de vida y tiene la firme convicción de que es más saludable reemplazar la alimentación a base de sólidos por

proceso de fotosíntesis. Dada su creencia en la efectividad de este procedimiento y habiendo tomado la determinación de llevarlo a cabo a partir de mañana, ahora José está racionalmente requerido a dejar de consumir alimentos y exponerse durante largas horas al sol cada mañana. Eso es lo que los principios de la racionalidad le demandan. De este modo, parece que José adquiere una justificación racional para su práctica solo por el hecho de haber formado una intención y una creencia (falsa) acerca del mundo. Cuando tiene lugar el fenómeno de la autopropulsión, entonces, la noción de justificación racional se torna trivial, ya que cualquier par de intenciones y creencias, por absurdas que fuesen, generan automáticamente una razón para el agente que no existía previo a la formación de la intención (Kolodny, 2005, p. 515). Esto provocaría la fusión de la dimensión normativa (prescriptiva) y la dimensión fáctica (descriptiva y empírica), desapareciendo así la noción misma de justificación como noción típicamente normativa.

El empuje tiene lugar, entonces, cuando se considera que una intención es una razón tanto para formar otras intenciones como para realizar la acción que la satisface. La idea de que las intenciones hacen una diferencia normativa, sin embargo, sigue siendo plausible e intuitiva. En palabras de Bruno Verbeek, el problema se plantea como un interrogante “So how are we to avoid bootstrapping, while still making room for the idea that our intentions matter normatively?” (2014, p.7). Por eso, otra de las alternativas para explicar el hecho de que las intenciones marcan una diferencia normativa y de mandan la formación de otras intenciones, es postular principios de la racionalidad de alcance amplio.

#### **4. Los requerimientos de la RE como un principio de alcance amplio**

Afirmar los principios de la racionalidad en su naturaleza de principios de alcance amplio evita el fenómeno del empuje. En esta interpretación, el alcance del requerimiento (R) afecta tanto al antecedente (la intención originar y las creencias relacionadas con ella) como al consecuente (las intenciones que deben formarse en función de la original) (Dancy, 1977; Broome, 2013; Brunero, 2020; Way 2011). Esto implica que ninguna intención particular constituiría una razón para formar o descartar otras intenciones, ya que siempre estaría abierta la posibilidad de descartar la intención original. Formalmente, el alcance amplio de este requerimiento podría expresarse así:

$$R[(I_x) \wedge C \rightarrow (I_y)]$$

Considerar los requerimientos racionales como principios de alcance amplio ha dado lugar a una serie de críticas. Quizá la más extendida sea la que recibe el mote de “el culto a las normas” en honor al concepto utilizado por Smart en su clásico artículo *Extreme and Restricted Utilitarianism* (1956). La idea que

subyace a esta crítica puede ser resumida en la siguiente afirmación: asumir actitudes en conformidad con los principios de la racionalidad puede conducir a asumir actitudes contrarias a la razón. Cuando este es el caso, resulta al menos discutible que podamos considerar el desempeño del agente como racional, por más que no esté violando ningún requerimiento de RE.

Pueden darse infinidad de ejemplos en los cuales la mera coherencia formal entre intenciones y creencias no garantiza la conformidad con la razón. En los casos más extremos, incluso puede resultar más racional (en términos de conformidad con la razón) actuar en contra de los principios de la racionalidad. Piénsese en ejemplo en el que individuo, José, desea llegar descansado a una importante entrevista laboral que tiene mañana temprano por la mañana y por eso forma la intención de tomar una alta dosis de somníferos para dormir más relajado. En este caso, sería más racional que José no forme las intenciones de los medios para realizar su intención, por ejemplo, que violando los principios de la racionalidad instrumental no intente llegar a la farmacia a tiempo para comprar los somníferos.

Los críticos sostienen que la versión de alcance amplio de los principios de la RE no logra reflejar la idea de que muchas veces no es igualmente racional optar por aceptar o rechazar, de un modo indiferente, cualquiera de las actitudes en juego (Finlay, 2010; Schoeder, 2009). En el ejemplo citado, José puede actuar en conformidad con las demandas de la RE o bien abandonando su intención original de consumir somníferos ( $I_x$ ), o bien formando la intención de ir a comprarlos ( $I_y$ ). Sin embargo, es claro que si el individuo en cuestión repensaría sus planes atendiendo a razones, estaría racionalmente requerido (R) a descartar su intención original, consideración que no logra ser capturada por esta formulación de alcance amplio. Si bien en términos generales conviene asumir actitudes en conformidad con los principios de la racionalidad, esto no es así en cada uno de los casos particulares. Pretender que las normas generales que conciernen a tipos de acciones tengan una fuerza normativa directa sobre las acciones particulares que son los casos concretos es una mera cuestión de “veneración de las reglas”, de ahí la denominación que recibe esta crítica.

## **5. Los requerimientos de la RE considerados como un mito**

La tesis de que existen principios normativos que regulan las relaciones entre las intenciones encierra una idea intuitiva. Después de todo, cuando un agente manifiesta intenciones que no son coherentes entre sí, parece ser legítima una acusación de irracionalidad, la cual además encierra un juicio de valor negativo. Pero lo que la literatura crítica ha puesto en cuestión es el hecho de que la coherencia exhibida por los estados intencionales de un agente racional sea el resultado de la presión normativa ejercida por ciertos principios de la

racionalidad. En otros términos, lo que se pone en cuestión es si tales principios de RE, tanto en su formulación de alcance estrecho como de alcance amplio, son genuinamente normativos (Star, 2018, p.3). En esta dirección, existe una postura crítica, identificada en la literatura como “la teoría del mito” (*the myth theory*), que considera la existencia de tales principios como un mito (*the myth view*).

La tesis de los críticos de la perspectiva del mito recibe el nombre de “explicación de la transparencia” (*transparency account*), la cual postula que la normatividad de la racionalidad es solo aparente, ya que deriva de la fuerza normativa de la racionalidad sustantiva (Kolodny, 2005, p.513). El precursor de esta crítica fue Raz, quien en su artículo *The myth of instrumental rationality* (2005) apunta contra la existencia de un requerimiento de coherencia formal instrumental que gobierne los medios y fines de un agente. Niko Kolodny (2008), por su parte, ha extendido y generalizado la crítica de Raz (2005), poniendo en cuestión la existencia de un principio de consistencia formal que regule la relación entre las intenciones.

Sin embargo, la idea de que la formación de intenciones viene aparejada con una fuerza normativa más allá de que cuenten o no con el aval de la razón sigue resultando plausible. Por esto, a los fines de defender la idea de que existe cierto tipo de presión normativa sobre las intenciones y creencias, y a su vez eludir las dificultades que suscita la postulación de principios de la RE en las dos formulaciones antes vistas, la estrategia propuesta comenzará por definir una posición sobre el contenido semántico de los estados intencionales. La hipótesis que se defenderá aquí es que el contenido tiene una importancia central a la hora de determinar las relaciones normativas entre las intenciones: en función de él se establecen las relaciones de coherencia, incoherencia, implicación, compatibilidad e incompatibilidad entre los estados intencionales de un agente. La postura sobre la constitución del contenido que se expondrá a continuación es el inferencialismo semántico en su variante desarrollada por la escuela de Pittsburgh, principalmente por Wilfrid Sellars y Robert Brandom.

## **6. Las presiones normativas sobre las intenciones desde un enfoque semántico normativista inferencialista**

El inferencialismo es una teoría semántica y, como tal, debe satisfacer dos demandas fundamentales. Una de ellas es explicar en qué consiste el hecho de que una representación efectivamente tenga una referencia, es decir, se constituya como una representación exitosa. La otra demanda proviene de la necesidad de explicar cómo algo (una expresión, una idea o un concepto) logra tener un contenido representacional (independientemente de que efectivamente tenga una referencia). Brandom denuncia que la tradición clásica representacionalista se ha ocupado solamente de la primera tarea

obviando la segunda, es decir, privilegiando el éxito de representación (*representational success*) por sobre el propósito representacional (*representational purport*) (Brandom, 1994, p. 78). La dimensión del inferencialismo que interesa a los fines de abordar el problema de la articulación racional entre intenciones es la que da cuenta de cómo se constituye el contenido representacional.

El inferencialismo es una perspectiva anti-representacionista. Esto no significa que niegue el concepto mismo de representación sino que se opone a tomarlo como un aspecto primitivo de la mente humana y, por ende, como un concepto básico en la teoría semántica, sin explicar cómo y en virtud de qué, algo se constituye como una representación para alguien. La estrategia inferencialista es derivar las propiedades representacionales de las inferenciales. Su propuesta general es que la articulación inferencial entre los ítems que pretenden ser representaciones es la que les confiere su contenido propiamente representacional (Brandom, 2000, p.12).

Una tesis fundamental que se encuentra a la base de la postura inferencialista defendida aquí es que el contenido representacional es intrínsecamente conceptual, ya que los conceptos son los portadores de relaciones lógicas (Frápolti y Villanueva, 2013, p. 597). El siguiente paso en la argumentación consiste en señalar que el contenido de las intenciones de los agentes humanos es conceptual. Cuando un agente humano se representa el mundo por medio de algún estado intencional (deseo, creencia o intención) siempre lo hace conceptualizándolo bajo algunos aspectos. El desafío del inferencialismo es, entonces, explicar en virtud de qué un estado mental (o expresión lingüística) adquiere contenido conceptual y qué lo diferencia de aquellos estados que carecen de esta dimensión conceptual.

La postura inferencialista normativista del contenido desarrollada aquí se coloca en las antípodas del dogma formalista. Según el denominado dogma formalista, las inferencias materiales son entinemas cuya validez es producto de una inferencia formal con una de sus premisas implícitas. Así, el dogma considera a las inferencias como válidas solo en virtud de su forma y no de su contenido. Siguiendo a Sellars (1953) en su rechazo a esta tesis formalista, aquí se sostendrá que las relaciones de coherencia e incompatibilidad son establecidas por inferencias materiales y no monótonas. Dominar inferencias materiales es una capacidad práctica diferente a la de la competencia lógica de saber explícitamente en qué consisten las inferencias formalmente válidas. Todo lo que se necesita para hacer las transiciones inferenciales entre las intenciones es comprender los contenidos representacionales de tales estados intencionales y tener un conocimiento acerca del mundo, al menos de la región de la realidad concreta en la que deberá actuar el agente.

La postura inferencialista expuesta aquí es esencialmente pragmatista. En este sentido, el inferencialismo se aparta de las visiones intelectualistas, las cuales consisten en entender el comportamiento práctico en términos de la captación previa de contenidos explícitos (Turbanti, 2017, p.182). Lo que aquí se pone en cuestión es la idea de que un agente deba ser consciente de todas las relaciones inferenciales en las que está inserto determinado concepto para poder tener un estado intencional (o para comprender el concepto en cuestión). Por el contrario, el conocimiento de las conexiones inferenciales entre los conceptos es un saber fundamentalmente práctico. Es por eso que al intelectualismo Brandom contrapone un enfoque pragmatista, entendiendo el pragmatismo como “(...) the claim that pragmatics is methodologically, conceptually, and explanatorily prior to semantics” (2018, p. 4). Con respecto a lo conceptual, el pragmatismo “(...) seeks to understand what it is explicitly to *say* or *think that* something is the case in terms of what one must implicitly know *how* (be able) to *do*” (Brandom 2000, p. 18). En estas coordenadas debe comprenderse la tesis del inferencialismo semántico de corte pragmatista, según el cual dominar un concepto es dominar de manera práctica las inferencias implicadas por él<sup>1</sup>.

Podría decirse que el lema de Brandom “semantics must in this way answer to pragmatics” (2000, p. 125) resume de manera concisa el espíritu pragmatista del inferencialismo semántico. Esto no solo implica explicar los significados en función del uso, sino intentar responder a la siguiente pregunta: qué es lo que un agente debe saber cómo hacer para que cuente como estando en un estado que posee un contenido. Por eso, la explicación de cómo se constituyen los contenidos semánticos comienza por la reflexión sobre la práctica de aplicar conceptos o de “*tomar algo como algo*”. La estrategia es explicar el contenido por medio del acto o de la función. Aquí una de las nociones clave es la de “saber cómo” (*know how*) y debe ser entendida en su sentido específico tal como lo propuso Ryle (1949), a saber, como opuesto al “saber que” (*know that*). Afirma Brandom (2018): “To understand others’ utterances, or even our own thoughts, we must have the ability to distinguish in practice what follows from what. That is a kind of know-how” (p. 6).

La necesidad de este saber práctico e implícito en lo que atañe a la posesión de contenidos se fundamenta en el regreso al infinito que una posición intelectualista genera. Esta crítica al intelectualismo toma el espíritu general de la argumentación desarrollada por Sellars (1963). El punto del argumento es

---

<sup>1</sup> Nótese que la cuestión abordada aquí desde el inferencialismo semántico no responde a la pregunta por el estatus ontológico de los conceptos, sino por las condiciones de su posesión y por los requisitos que ha de cumplir un estado con contenido conceptual. Para un desarrollo más amplio de la diferencia entre estos interrogantes, confróntese Aguilera, M. et. al. (2015, p. 18).

que una norma  $N$  posee un carácter universal y las situaciones a las que se aplica ( $a_1, a_2, \dots, a_n$ ) son siempre casos particulares. Entonces, para saber si una situación " $a_n$ " particular dada es o no es un caso de aplicación de una norma  $N$ , es necesario aplicar otra norma,  $N1$ , que indique cómo aplicar  $N$ . Partiendo del supuesto intelectualista, la norma  $N1$  debe ser también explícita. Esto a su vez requiere a existencia de una nueva norma explícita,  $N2$ , que indique cómo aplicar  $N1$  a  $N$ . Así se ve claramente el regreso al infinito que supone este tipo de posturas. Si los casos a los que corresponde aplicar la regla estarían dictados por otra regla explícita, se requeriría de una nueva meta-regla explícita que regule la aplicación de esta última, y así sucesivamente. Brandom resume este argumento en una sola frase: "The rule says how to do one thing correctly only on the assumption that one can do something else correctly, namely apply the rule" (1994, p.21).

Cabe destacar que esta perspectiva inferencialista y pragmatista se compromete con el carácter no-monótono de las inferencias que articulan los conceptos entre sí (Brandom, 2000, p.89). Las inferencias que están implicadas en el contenido conceptual de una intención de un agente  $X$  en un determinado momento  $T1$  son no-monótonas en tanto que pueden verse alteradas si el agente adquiere nuevos conocimientos, tanto conceptuales como prácticos en el momento  $T2$ . La intención de Juan de ir al cine, por ejemplo, implica la intención de comprar una entrada. Ahora bien, puede que Juan se entere que la función es a beneficio de un comedor escolar y que la entrada consiste en donar un alimento no perecedero. Otra situación alternativa podría ser que un amigo le diga a Juan que él lo invitará a ver la película como regalo adelantado de cumpleaños. En ambos casos se dan escenarios en los cuales la intención de ir al cine pierde su articulación inferencial con la intención de comprar una entrada. En el primer ejemplo, Juan adquiere una información empírica más específica sobre la proyección de la película. En el segundo caso, la intención del amigo de Juan que incluye el concepto de "regalo" excluye la intención de Juan de comprar la entrada.

Una de las consecuencias de esta concepción inferencialista sobre el contenido semántico es el holismo de lo conceptual. Si lo que determina el contenido de una representación es el rol que juega ésta en su articulación inferencial con otros conceptos, entonces la existencia aislada de un concepto es imposible (Brandom, 2000, p.15). En este punto, ya se puede ir prefigurando la no necesidad de postular principios regulativos meramente formales de la racionalidad que expliquen la articulación racional entre las intenciones y entre intenciones y creencias, ya que estas están constitutivamente articulares en virtud de los conceptos que incluyen sus contenidos representacionales.

## **7. El inferencialismo semántico como una postura normativista**

La postura inferencialista con raíces en la filosofía de Sellars y desarrollada por Brandom ofrece herramientas conceptuales especialmente relevantes para este trabajo dado que a su vez son normativistas (Brandom, 2018, p. 4). La idea es que los agentes humanos, en tanto que son criaturas discursivas, son sujetos de estados intencionales que se encuentran inferencialmente interconectados entre sí de acuerdo a ciertas normas. Así, este tipo de inferencialismo se ubica en el contexto de la corriente normativista impulsada por Kripke (1982) dentro de la filosofía del lenguaje de la segunda mitad del siglo XX. La idea central de esta corriente es que el significado es, esencialmente y no de un modo meramente accidental, un fenómeno normativo (Whiting, 2016, p. 223). Pero esta tesis normativista no se vio limitada al caso de los significados lingüísticos, sino que también es defendida en relación al contenido de los estados intencionales en general.

Para comprender mejor el rol que juegan las normas en la constitución del contenido de los estados intencionales, conviene recordar las definiciones en términos deónticos que Brandom presenta de las intenciones y las creencias. Los estados intencionales se caracterizan por ser tipos de actitudes normativas hacia los contenidos conceptuales. Así, mientras que tener una creencia es tomar un contenido como verdadero, tener una intención implica un compromiso a hacer verdadero un contenido (y compromete al agente con la formación de otras intenciones y creencias inferencialmente articuladas). Aquí puede apreciarse la estrategia pragmatista de esta perspectiva. Atribuir o reconocer una intención no es un pronunciamiento sobre un estado o proceso psicológico que esté teniendo lugar en el interior de su mente. Atribuir o reconocer una intención es, esencialmente, asumir o atribuir un compromiso con un curso de acción. A su vez, las razones también cumplen un rol definido en términos deónticos, ya que son las que habilitan al agente a actuar de determinada manera o a formar otros estados intencionales (Brandom, 2010, p. 10).

En la propuesta normativista desarrollada aquí, las normas relevantes son las que gobiernan las implicaciones materiales entre compromisos y habilitaciones, constituyendo así el contenido de los estados intencionales. Estas normas establecen las actitudes que los agentes racionales deben tomar hacia los contenidos de sus estados intencionales. Estas normas no son meramente regulativas, sino que son constitutivas de las inferencias ya que ningún pasaje de un contenido a otro cuenta como una inferencia a menos que se conforme a ciertas normas. Las normas de inferencias materiales entre los distintos estados intencionales determinan, entonces, los estatus deónticos a los que el agente queda comprometido o habilitado al adoptar una actitud hacia determinados contenidos. A su vez, los movimientos inferenciales que

constituyen las transiciones entre estos estados son tres: inferencias materiales que conservan compromisos (*commitment-preserving inferences*), las que conservan habilitaciones (*entitlement-preserving inferences*) y las que establecen relaciones de incompatibilidad (*incompatibility entailments*) (establecen cuando un compromiso con un contenido impide la habilitación hacia otro, Brandom, 2010, p. 12).

Retomar un ejemplo visto anteriormente será de gran utilidad para exhibir como se articulan estos aspectos entre sí. Cuando Juan forma la intención de ir al cine, lo que asume Juan es una serie de compromisos racionales. Entre los compromisos que Juan debe tomar está el de formar la intención de adquirir una entrada. A su vez, Juan queda inhabilitado a asumir otros compromisos, como por ejemplo concurrir al teatro esa misma noche. Como puede apreciarse, la intención de Juan “ir al cine el sábado por la noche”, “conseguir una entrada para la obra del sábado por la noche” y “rechazar la invitación para ir al teatro el sábado por la noche”, están inferencialmente articuladas, ya que las dos últimas se siguen de la primera en virtud de sus contenidos. Ahora bien, la tesis inferencialista es que esta articulación inferencial es la que constituye cada contenido y le otorga su carácter específicamente conceptual. En otras palabras, la intención de ir al cine el sábado es esa intención y no otra por estar articulada inferencialmente con la intención de conseguir la entrada específica. Comprender el contenido de la primera implica aceptar su vínculo inferencial con la segunda. A su vez, esta es una relación normativa: la intención de ir al teatro está vinculada inferencialmente con otras intenciones que el agente del ejemplo debe formar, independientemente de que de hecho lo haga o de que tenga la disposición a hacerlo.

Una distinción conceptual clave en la propuesta de Brandom es la diferencia ya mencionada entre compromiso y habilitación. El compromiso y la habilitación son estados deónticos con características propias. La habilitación está relacionada con el vínculo entre un determinado estado intencional y las razones que lo avalan. El compromiso, en cambio, es prospectivo, tiene que ver con los demás estados intencionales que el agente debe adoptar en función del primero. En este marco, todas las intenciones son compromisos prácticos que generan otros compromisos inferencialmente articulados. Sin embargo, no todas las intenciones están habilitadas por razones: “One can act intentionally either with or without reasons, or one may or may not act for the reasons one has” (Brandom, 1994, p. 262). A veces esto ocurre porque no existe ninguna razón particular que avale una intención y, otras veces, los agentes forman intenciones contrarias a la razón.

## **8. El inferencialismo semántico como una respuesta a los problemas asociados a los requerimientos de RE**

Cuando un agente tiene una determinada intención, según el modelo deóntico normativista de Brandom, queda racionalmente comprometido con otras intenciones que están articuladas inferencialmente con la primera en virtud de su contenido conceptual. En este sentido, las normas que regulan estas transiciones podrían ser consideradas de alcance estrecho, dando lugar al fenómeno del empuje: por la mera formación de una intención, el agente quedaría racionalmente justificado a actuar de cualquier modo y a adoptar las intenciones consistentes con la intención inicial. Sin embargo, este fenómeno puede evitarse en el marco de un modelo semántico normativista, deóntico e inferencialista, siendo la clave la interacción entre los conceptos de compromiso y habilitación mencionados anteriormente.

Las intenciones, en tanto compromisos prácticos, solo generan otros compromisos, pero por sí mismos no habilitan racionalmente. En resumen, si un agente forma una intención sin habilitación racional, esta intención, como cualquier otra, es un compromiso práctico articulado con otros en virtud de su contenido, pero esa articulación no suplanta la carencia de habilitación racional que estuvo desde el momento de su misma formación. Así se puede evitar el fenómeno de la autopropulsión y a su vez darle sentido a la idea de que las intenciones tienen una importancia normativa. La respuesta, en este marco, sería que las intenciones no son razones por sí mismas, pero hacen una diferencia normativa en función de su articulación inferencial con otros estados. De este modo, el fenómeno del empuje no tiene lugar en el modelo inferencialista defendido aquí. El punto fuerte del inferencialismo semántico normativista es que las normas que conectan una intención con otras no son normas regulativas, extrínsecas a las intenciones, que demandan la formación de nuevos estados tomando la intención original como razón. Por el contrario, la normatividad es constitutiva de cada intención e intrínseca a su contenido. Quien forma una intención implícitamente asume un compromiso para con un conjunto de intenciones inferencialmente articuladas, lo cual es completamente independiente de si cuenta o no con el aval de razones para tales actitudes intencionales.

La dificultad a la que da lugar el considerar los principios normativos que regulan las intenciones como principios de alcance amplio es la del conflicto entre principios de la racionalidad y principios de la razón. Tal como fue presentado, el problema surge por el hecho de que formar intenciones ateniéndose a los principios de la racionalidad, pero que resulten contrarias a la razón. La diferencia entre compromiso y habilitación es pertinente nuevamente para evitar tales consecuencias. En este modelo inferencialista, las normas que articulan el paso de una intención a otra son normas que rigen inferencias que conservan compromisos pero no necesariamente habilitaciones. Establecida esta diferencia, no es curioso que un agente sea coherente en sus compromisos prácticos pero viole la fuerza de las razones o al menos la ignore. El ejemplo del hombre que decide tomar somníferos para dormir profundamente y llegar temprano a su compromiso de la mañana, ilustra muy bien este punto. Su intención original implica ciertos compromisos que él debe asumir en cuanto a la formación de nuevas intenciones. Sin embargo, esta intención estuvo desde un comienzo en contra de la razón, y por lo tanto ignorar los compromisos que genera terminará estando en consonancia las demandas de la razón.

Cabe destacar que la fuerza normativa que vincula las intenciones con otras intenciones también es condicional y está sujeta al hecho de que el agente mantenga la intención original. Lo que podría cuestionarse en los casos en que se establece una transgresión a los principios de la razón es la adopción de la intención original o la formación de una determinada creencia, no el reconocimiento de los compromisos que estas generan. En términos brandonmianos, puede decirse que la racionalidad humana consiste en la posibilidad de reconocer y hacer explícitos estados deónticos tanto de compromiso como de habilitación. Las fallas en la racionalidad en el caso de los agentes humanos pueden consistir en la imposibilidad de reconocer alguno de estos dos estatus cuando tienen lugar.

## **9. Comentarios finales**

El interrogante que motivó este trabajo puede ser formulado de manera concisa del siguiente modo: ¿existen realmente principios de la racionalidad que regulan las relaciones entre las intenciones de los agentes humanos? El primer punto de acuerdo a señalar se da en relación a los críticos. Al igual que autores como Kolodny y Raz, la coherencia fue considerada aquí una consecuencia, es

decir, una propiedad emergente y no un principio *sui-generis*. Pero a diferencia de lo que sostienen los críticos de la visión del mito se rechazó la idea de que lo que está a la base de la coherencia exhibida por la articulación entre las intenciones y creencias es la conformidad de las actitudes con la razón.

La idea que está en el corazón del enfoque normativista propuesto es que cuando un estado determinado es identificado como una intención hay ciertas normas ejerciendo su fuerza que lo constituyen como tal. En el caso de la semántica inferencialista de Sellars y Brandom, esas normas constitutivas son las normas de las inferencias materiales que articulan una intención con otros estados intencionales. La coherencia en este contexto es el resultado de esta articulación inferencial. No se trata de una mera coherencia formal que alude simplemente a la ausencia de contradicciones. Es una coherencia que consiste en la preservación de estados deónticos (compromisos) en el paso de una intención a otra (sea en el reconocimiento o en la atribución) y que depende del contenido material que constituye cada intención. Como puede apreciarse, la normatividad que se pone aquí en juego es constitutiva y no proviene de principios meramente regulativos extrínsecos a las intenciones. En este marco, la advertencia de una relación de incoherencia entre las intenciones de un agente en todo caso es evidencia de que hubo una falla en el reconocimiento de sus compromisos prácticos, es decir, sus intenciones. Pero a diferencia de los críticos, entonces, no se considera que la coherencia sea siempre un producto de atenerse a las demandas de la razón, ya que retomando la distinción entre compromiso y habilitación es claro que un agente puede asumir un compromiso práctico y ser consecuente con sus consecuencias de manera independiente a estar habilitado o no por alguna razón.

## Bibliografía

- Aguilera, M., Danon, L., & Scotto, C. (2015). *Conceptos, lenguaje y cognición*. Editorial de la UNC.
- Brandom, R. (1994). *Making it explicit: Reasoning, representing, and discursive commitment*. Harvard University Press.
- Brandom, R. (2000). *Articulating reasons: An introduction to inferentialism*. Harvard University Press.
- Brandom, R. (2002). *Tales of the mighty dead: Historical essays in the metaphysics of intentionality*. Harvard University Press.
- Brandom, R. (2010). Conceptual content and discursive practice. En J. Langkau & C. Nimtz (Eds.), *New perspectives on concepts* (pp. 13–35). *Grazer Philosophische Studien*.

- Brandom, R. (2018). *Robert Brandom's 2018 John Dewey lectures at the Dewey Center of Fudan University, China* (N. Sun, J. Zhou, Y. Huang, & J. Wen, Trans.). Shanghai People's Publishing House.
- Broome, J. (2001). Normative practical reasoning. *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume*, 75, 175–193.
- Broome, J. (2013). *Rationality through reasoning*. Wiley-Blackwell.
- Broome, J. (2020). Rationality versus normativity. *Australasian Philosophical Review*, 4(4), 293–311.
- Brunero, J. (2020). *Instrumental rationality: The normativity of means-end coherence*. Oxford University Press.
- Dancy, J. (1977). The logical conscience. *Analysis*, 37(2), 81–84.
- Frápolli, M. J., & Villanueva, N. (2013). Frege, Sellars, Brandom: Expresivismo e inferencialismo semánticos. En *Perspectivas en la filosofía del lenguaje* (pp. 583–617).
- Kolodny, N. (2005). Why be rational? *Mind*, 114(455), 509–563.
- Kolodny, N. (2008). The myth of practical consistency. *European Journal of Philosophy*, 16(3), 366–402.
- Korsgaard, C. M. (1997). The normativity of instrumental reason. En G. Cullity & B. Gaut (Eds.), *Ethics and practical reason* (pp. 215–254). Clarendon Press.
- Kripke, S. A. (1982). *Wittgenstein on rules and private language*. Harvard University Press.
- Raz, J. (2005). Instrumental rationality: A reprise. *Journal of Ethics & Social Philosophy*, 1(1), 1–20.
- Ridge, M. (2014). *Impassioned belief*. Oxford University Press.
- Scanlon, T. M. (1998). *What we owe to each other*. Harvard University Press.
- Schroeder, M. (2004). The scope of instrumental reason. *Philosophical Perspectives*, 18(1), 337–364.
- Schroeder, M. (2009). Means-end coherence, stringency, and subjective reasons. *Philosophical Studies*, 143(2), 223–248.
- Sellars, W. (1953). Inference and meaning. *Mind*, 62, 313–338.
- Sellars, W. (1963). Some reflections on language games. En *Science, perception and reality* (pp. 321–358). Ridgeview Publishing Co.
- Smart, J. J. C. (1956). Extreme and restricted utilitarianism. *The Philosophical Quarterly*, 6, 344–354.

- Star, D. (Ed.). (2018). *The Oxford handbook of reasons and normativity*. Oxford University Press.
- Turbanti, G. (2017). *Robert Brandom's normative inferentialism*. John Benjamins Publishing Company.
- Verbeek, B. (2014). On the normativity of intentions. *Topoi*, 33, 87–101.
- Way, J. (2011). The symmetry of rational requirements. *Philosophical Studies*, 155(2), 227–239.

# AUTORES

**Gustavo Bodanza** es Doctor en Filosofía, Investigador Principal de CONICET en el Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales del Sur y Profesor Titular de *Lógica* en el Departamento de Humanidades de la Universidad Nacional del Sur (Bahía Blanca, Argentina). Trabaja en modelos formales con diversas aplicaciones en sistemas argumentativos de Inteligencia Artificial, paradojas semánticas, toma de decisiones individuales y colectivas y sistemas sociales. En los últimos años también ha realizado estudios empíricos contrastando experimentalmente modelos normativos de argumentación en IA con el comportamiento de gente real, a fin de dilucidar su aplicabilidad como teorías descriptivas de la argumentación humana.

**María Gabriela Fulugonio** es Profesora Adjunta, Licenciada y Doctora en Filosofía de la Universidad de Buenos Aires. Actualmente enseña en las Facultades de Ciencias Económicas y de Filosofía y Letras. Ha participado en numerosos proyectos de investigación UBACyT, ANPCT y bilaterales DFG-CONICET y desarrollado estancias doctorales y posdoctorales en la LMU (Múnich), Universidad de Paderborn y en la FAU (Erlangen). Ha enseñado también en la Universidad Nacional de Quilmes y se desempeñó como *Teaching/Research Assistant* de la Universidad de Paderborn. Ha publicado en *Análisis Filosófico*, *Cuadernos de Filosofía*, *The Bulletin of ASL*, *CLE e-prints*, *i. a.* En los últimos años ha sido invitada como investigadora por el Instituto de Filosofía de la Universidad de Erlangen y como conferencista por la PH Burgenland (Eisenstadt, Austria) y el *Frauenzentrum* de Erlangen. Es integrante del Proyecto UBACyT “Modelado matemático en economía” (FCE-UBA). Su área de especialización es la filosofía de la lógica, de la matemática y del lenguaje.

**Javier Legris** es Doctor en Filosofía e Historia General de la Ciencia (Universidad de Regensburg, Alemania). Actualmente dirige el Centro de Investigación en Epistemología de las Ciencias Económicas (CIECE, Facultad de Ciencias Económicas, UBA), siendo investigador del CONICET, en el Instituto Interdisciplinario de Economía Política (IIEP, UBA-CONICET). Sus publicaciones se ubican en las áreas de historia de la lógica simbólica, filosofía de la lógica, filosofía de la matemática y filosofía de la economía. Ha sido docente de posgrado y profesor invitado en universidades de Argentina, Brasil, Chile, Paraguay y Uruguay. Ha sido Fellow de la Fundación Alexander von Humboldt (1999) y del Columbia University Institute for Scholars at Reid Hall (2004). Ha recibido el Diploma al Mérito en Humanidades (Lógica y Filosofía de la Ciencia) de la Fundación KONEX (2016).

**Guillermo Nigro Puente** Guillermo Nigro Puente es Profesor de Filosofía (Instituto de Profesores "Artigas" [CFE-ANEP]). Licenciado en Filosofía (Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación [FHCE], Universidad de la República [UdelaR]), Magíster en Ciencias Humanas, opción Filosofía

Contemporánea (FHCE, Udelar). y Doctor en Filosofía (PPGF, Universidade Federal da Bahia). Profesor estable de Lógica, Filosofía Teórica e Historia de la Filosofía Analítica en el Instituto de Profesores "Artigas", así como Profesor Adjunto en el Departamento de Lógica y Metodología del Instituto de Filosofía (FHCE, Udelar). Su trabajo se concentra en el método de elucidación en filosofía (debate Carnap-Quine) y en ciencias formales. Así mismo, también trabaja en temas de filosofía e historia de las matemáticas, especialmente en torno a la obra de David Hilbert.

**Mariana Olezza** es ingeniera en Informática por la Universidad Nacional de Córdoba y actualmente es Candidata al Doctorado en Filosofía por la Universidad de Buenos Aires (UBA), gracias a una beca de doctorado de la misma universidad. Ha sido docente en la asignatura Lógica (Facultad de Ciencias Económicas, UBA) y ha sido pasante en *Infosys* (Bangalore, India). Ha publicado en las áreas de Filosofía de la Información, Filosofía de la Inteligencia Artificial y Filosofía de las Ciencias Cognitivas.

**Ayelen Sanchez** es doctora en Filosofía y Licenciada en Filosofía (orientación lógica y filosofía de la ciencia) por la Universidad Nacional del Sur (UNS). Se desempeña como docente en la carrera Licenciatura en filosofía (Departamento de humanidades - UNS) y en la maestría Políticas y estrategias (Departamento de Economía - UNS). Es miembro de diversos grupos de investigación en el área de la lógica y la filosofía de la ciencia.

**Luis Adrián Urtubey** es licenciado y doctor en filosofía por la Universidad Nacional de Córdoba. Obtuvo su doctorado en el año 1998. Con posterioridad, ha realizado una maestría en Lógica y Filosofía de la Ciencia (2008-2009) en la Universidad de Salamanca (España). Actualmente es Profesor Titular Plenario de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la U.N.C. y Profesor Titular de dedicación exclusiva por concurso de Lógica III desde el año 2010. Ha dirigido proyectos de investigación y tesis doctorales en el área de la lógica y filosofía de la lógica de manera continua en los últimos 20 años y ha publicado numerosos trabajos en la especialidad tanto en Argentina como en diversas publicaciones internacionales. Se ha desempeñado en cargos de gestión institucional o de ciencia y tecnología en la Universidad Nacional de Córdoba y colaborado con entidades de investigación del país y del exterior.

**Omar Vásquez Dávila** es Profesor de Filosofía por la Universidad de Buenos Aires. Se desempeña como docente e investigador de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) en el área de Lógica y Epistemología perteneciente al Instituto de Ciencias (ICI). Sus áreas y temas de investigación giran en torno a la filosofía de la lógica, lógicas no-clásicas, verdad y paradojas.

Es integrante del BA-LOGIC (Buenos Aires Logic Group). Desarrolla sus actividades de docencia en las asignaturas Lógica y Filosofía de la Ciencia.

**Aída Sandra Visokolskis** es Doctora en Filosofía. Licenciada en Matemática. Magister y Especialista en Enseñanza de la Educación Superior. Profesora de las asignaturas “Filosofía de la Matemática” (Facultad de Filosofía y Humanidades, UNC) e “Historia y Fundamentos de la Matemática” (Depto. Matemática, UNVM). Sus trabajos giran en torno a la temática central de la creatividad en matemática, en el área general de Historia y Filosofía de la Matemática. Otros temas de sus trabajos: inferencias no deductivas, abducción en Charles Sanders Peirce, y demás variantes no deductivas, que contribuyen a la formación de ideas, conceptos, proposiciones, argumentos y teorías matemáticas. Dirige proyectos de investigación en torno a estos temas, y presenta publicaciones afines, así como participación en congresos, workshops y demás eventos científicos, históricos y filosóficos.



**CENTRO DE INVESTIGACION  
EN EPISTEMOLOGIA  
DE LAS CIENCIAS ECONOMICAS**  
[ciece.economicas.uba.ar](http://ciece.economicas.uba.ar)

ISBN 978-950-29-2095-5



9 789502 920955